

入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ	
	B	1				氏 名	

1 次の極限值を求めよ.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = 2^2 - 4 = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{2^2 - 4}{2 + 2} = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 8) = 0^3 - 8 = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 12$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x + 1)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^2 + 2 \cdot 2 + 4}{2 + 1} = 4$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 5)}{(x - 1)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 5}{x + 2} = \frac{6}{3} = 2$

g) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{1 - (-1) + 1} = \frac{1}{3}$

h) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a + h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2a + h)h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2a + h) = 2a$

i) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2 + h)^3 - 8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8 + 12h + 6h^2 + h^3 - 8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(12 + 6h + h^2)h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (12 + 6h + h^2) = 12$

j) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a + h)^3 - a^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - a^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3a^2 + 3ah + h^2)h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3a^2 + 3ah + h^2) = 3a^2$

k) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{a + h} - \frac{1}{a}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{a + h} - \frac{1}{a} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{a - (a + h)}{(a + h)a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{(a + h)a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(a + h)a} = -\frac{1}{a^2}$

2 関数 $y = \frac{x^3}{|x|}$ について以下の問いに答えよ.

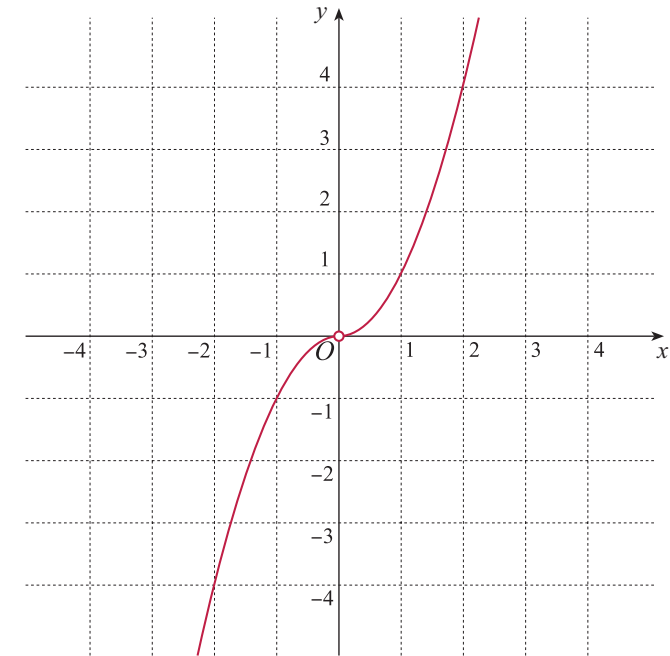
a) この関数の定義域 (関数が定義されている x の範囲) を示せ.

この関数は分母が 0 になる点を除いて定義されるから, 定義域は $x = 0$ 以外の実数全体.
(単に $x \neq 0$ と表すことが多い.)

b) この関数を, 場合分けによって表すことにより, 絶対値記号を用いない形で表せ.

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \text{ だから, } \frac{x^3}{|x|} = \begin{cases} \frac{x^3}{x} & x > 0 \\ \frac{x^3}{-x} & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

c) この関数のグラフを描け. (定義されていない点は $\circ$ で表すこと.)



d) グラフから $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{|x|}$ を求めよ.

$x \rightarrow 0$ としたとき, グラフをみると y の値も 0 に近づくので $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{|x|} = 0$

□3 次の各々の関数について、 $x = 1$ から $x = 3$ までの平均変化率を求めよ.

a) $f(x) = 4x - 3$

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{2} = 4.$$

b) $f(x) = 10x^2 + x$

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{93 - 11}{2} = 41.$$

c) $f(x) = x^3 - 1$

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{26 - 0}{2} = 13.$$

d) $f(x) = -\frac{2}{x}$

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-\frac{2}{3} - (-2)}{2} = \frac{2}{3}.$$

□4 $f(x) = 3 - 2x^2 + x$ とするとき、 $x = a$ から $x = a + h$ までの平均変化率を求めよ.

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} &= \frac{(3 - 2(a+h)^2 + (a+h)) - (3 - 2a^2 + a)}{h} = \frac{-2((a+h)^2 - a^2) + h}{h} \\ &= \frac{-2(2ah + h^2) + h}{h} = -4a - 2h + 1.\end{aligned}$$

□5 ある物体の位置が時間 t の関数として $s(t) = -16t^2 + 144t$ で与えられている.

a) $t = 1$ から $t = 2$ の間の平均の速さ ($s(t)$ の平均変化率) を求めよ.

$$s(2) = -16 \times 2^2 + 144 \times 2 = 226$$

$$s(1) = -16 \times 1^2 + 144 \times 1 = 128$$

$$\therefore (\text{平均変化率}) = \frac{s(2) - s(1)}{2 - 1} = \frac{226 - 128}{1} = 96.$$

b) $t = 1$ から $t = 1 + h$ の間の平均の速さ ($s(t)$ の平均変化率) を求めよ.

$$s(1+h) = -16 \times (1+h)^2 + 144(1+h) \times (1+h) = 128 + 112h - 16h^2$$

$$s(1) = -16 \times 1^2 + 144 \times 1 = 128$$

$$\therefore (\text{平均変化率}) = \frac{s(1+h) - s(1)}{h} = \frac{128 + 112h - 16h^2 - 128}{h} = 112 - 16h.$$

□6 半径が r の球の体積 V は $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ で与えられる. r が 1 から $1 + h$ に変化したときの V の平均変化率を求めよ.

$$r = 1 + h \text{ のとき, } V = \frac{4}{3}\pi(1+h)^3$$

$$r = 1 \text{ のとき, } V = \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3$$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{平均変化率}) &= \frac{\frac{4}{3}\pi(1+h)^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot 1}{(1+h) - 1} \\ &= \frac{4}{3}\pi \frac{(1+3h+3h^2+h^3) - 1}{h} \\ &= \frac{4}{3}\pi \frac{\cancel{h}(3+3h+h^2)}{\cancel{h}} \\ &= \frac{4}{3}\pi(3+3h+h^2)\end{aligned}$$