

【裏に続く】

7 「過疎現象で、村の人口が毎年 1 割ずつ減っていくので、このままでは 10 年経つと村は空っぽになる…」これは正しいか。

人口が毎年 1 割ずつ減るとは、人口が前年の 9 割になる、すなわち前年の 0.9 倍になるということである。これが 10 年続くと、人口はもとの $(0.9)^{10}$ になるが、これは 0 ではないので、村が空っぽになるわけではない。

以下の問題では、必要であれば $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いよ。

- 8 a) 2^{41} は何桁の数か。
b) 2^{41} の最高位の数字を求めよ。

$\log_{10} 2^{41} = 41 \log_{10} 2 \doteq 41 \times 0.3010 = 12.3410$ であるが、
 $\log_{10} 2 \doteq 0.301 < 0.341 < \log_{10} 3 \doteq 0.4771$

より、
 $\log_{10}(2 \times 10^{12}) < \log_{10} 2^{41} < \log_{10}(3 \times 10^{12})$

が成り立つ。すなわち、
 $2 \times 10^{12} < 2^{41} < 3 \times 10^{12}$

これは、a) 2^{41} が 13 桁の数で、b) その最高位の数字が 2 であることを示している。

9 体内に入った水銀が体外に排出されて、もとの量の $\frac{1}{2}$ になるには 125 日かかるといわれている。もとの量の $\frac{1}{10}$ 以下になるには何日かかるか。

水銀が体内に入ってから 125 日後にもとの量の $\frac{1}{2}$ なり、 125×2 日後にはもとの量の $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, 125×3 日後にはもとの量の $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, ..., $125 \times n$ 日後にはもとの量の $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ となる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^n &\leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow \log_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \log_{10} \frac{1}{10} \Leftrightarrow -n \log_{10} 2 \leq -1 \\ \Leftrightarrow n &\geq \frac{1}{\log_{10} 2} \doteq \frac{1}{0.3010} \doteq 3.322 \end{aligned}$$

水銀が体内に入ってから $125 \times 3.322 \doteq 415.3$ 日後にもとの量の $\frac{1}{10}$ になる。
[水銀が体内に入ってから x 日後にはもとの量の $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{125}}$ になるから $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{125}} \leq \frac{1}{10}$ を解いてもよい.]

10 座標軸の 1 目盛りを 1cm として関数 $y = 2^x$ のグラフをかくとき、 x の変域をたとえば $0 \leq x \leq 10$ とすると y の変域は $1 \leq y \leq 2^{10}$ となり、グラフ用紙は y 軸方向について 1024cm の長さが必要と考えられる。 x の変域を $0 \leq x \leq 60$ としたとき、グラフ用紙は理論的にはおよそどのくらいの長さが必要か。次のうちから最も近いものを選び、理由をつけて答えよ。

- a) 1km b) 100km c) 地球から月までの距離（約 38 万 km）
d) 地球から太陽までの距離（約 1.5×10^{11} m） e) 1 光年（約 9.5×10^{15} m）

$2^{10} = 1024$ cm を $10^3 = 1000$ cm で近似すると、 $2^{60} = (2^{10})^6 \doteq (10^3)^6 = 10^{18}$ cm となる。
 100 cm = 1 m であることを考えると、 2^{60} cm は約 10^{16} m である。
一方、1 光年は 9.5 を約 10 と見なすと、約 $10 \times 10^{15} = 10^{16}$ m となり、 2^{60} cm に一番近いのは、e) の 1 光年であることがわかる。

11 星の見かけの明るさは 1 等星、2 等星、..., など、等級で表す。星の等級と明るさの関係は、次のように対数を用いて表すことができる。 m 等星の明るさを L_m , n 等星の明るさ L_n とすると、

$$0.4(n - m) = \log_{10} L_m - \log_{10} L_n$$

が成り立つ。

- a) 1 等星の明るさは 6 等星の明るさの何倍であるか。
上式で $m = 1$, $n = 6$ とおくと

$$0.4(6 - 1) = \log_{10} L_1 - \log_{10} L_6 \Leftrightarrow 2 = \log_{10} \frac{L_1}{L_6} \Leftrightarrow 10^2 = \frac{L_1}{L_6} \Leftrightarrow L_1 = 100L_6$$

すなわち、1 等星の明るさは 6 等星の明るさの 100 倍。

- b) 北極星は 2.0 等星である。北極星の 2 倍の明るさを持つ星は何等星となるか。

北極星の 2 倍の明るさを持つ星を m 等星とすると、 $\frac{L_m}{L_2} = 2$ が成り立つ。一方、上式で $n = 2$ とおいた式より、 $\log_{10} \frac{L_m}{L_2} = 0.4(2 - m)$ が成り立つ。これより、

$$\log_{10} 2 = 0.4(2 - m) \Leftrightarrow m = 20 = 2 - \frac{\log_{10} 2}{0.4} \doteq 2 - \frac{0.3010}{0.4} = 1.2475$$

したがって、北極星の 2 倍の明るさを持つ星は約 1.25 等星