入学年度	学部	学 科		組		番	号		検	フリガナ
		B		1						氏 名

$\boxed{1}$ 次の関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求め，$f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．さらにそれをもとに増減表を書け．

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x(x-2) > 0$
$\Leftrightarrow x < 0$ または $2 < x$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x-1)(x+3)$
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) > 0$
$\Leftrightarrow x < -3$ または $1 < x$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	32	↘	0	↗

$\boxed{2}$ 関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ の導関数 $f'(x)$ を求め，$f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．さらにそれをもとに増減表を書き，$-2 \leqq x \leqq 3$ における最大値と最小値を求めよ．また，それらを与える x の値を求めよ．

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x(x-2) > 0$
$\Leftrightarrow x < 0$ または $2 < x$

右の増減表より，

$$\begin{cases} \text{最大値} \quad 4 \quad (x = 0, 3) \\ \text{最小値} \quad -16 \quad (x = -2) \end{cases}$$

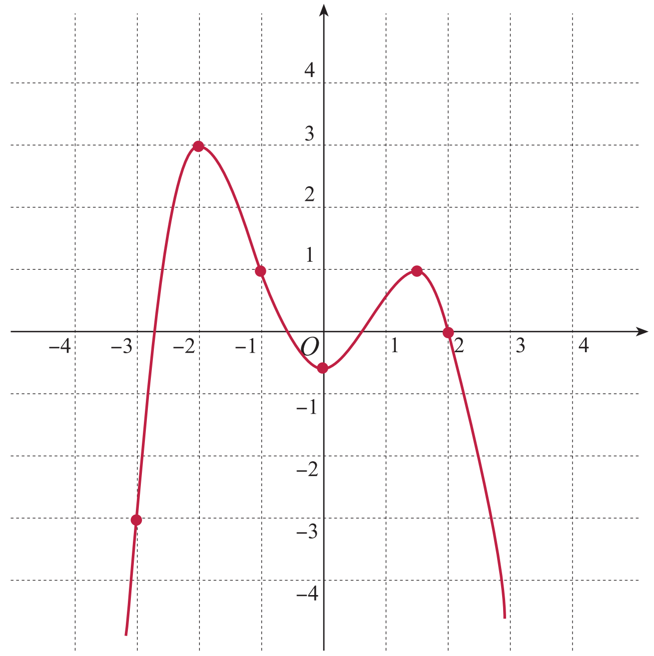
x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	-16	↗	4	↘	0	↗	4

$\boxed{3}$ 下の表は，関数 $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ について，わかっていることをまとめてある．このとき，$y = f(x)$ のグラフを可能な限りなるべく忠実に描け．

a)

x	-3	-2	-1	0	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	-3	3	1	$-\frac{1}{2}$	1	0

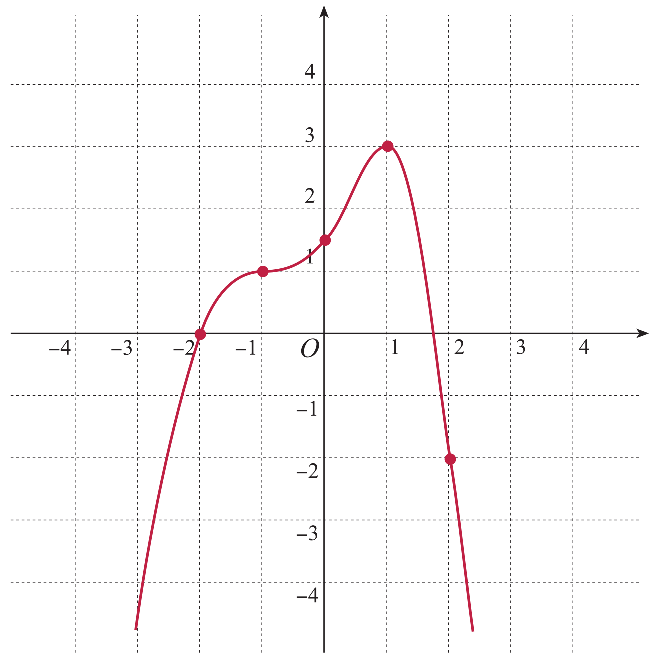
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	3	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	1	↘



b)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0	1	$\frac{3}{2}$	3	-2

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	1	↗	3	↘



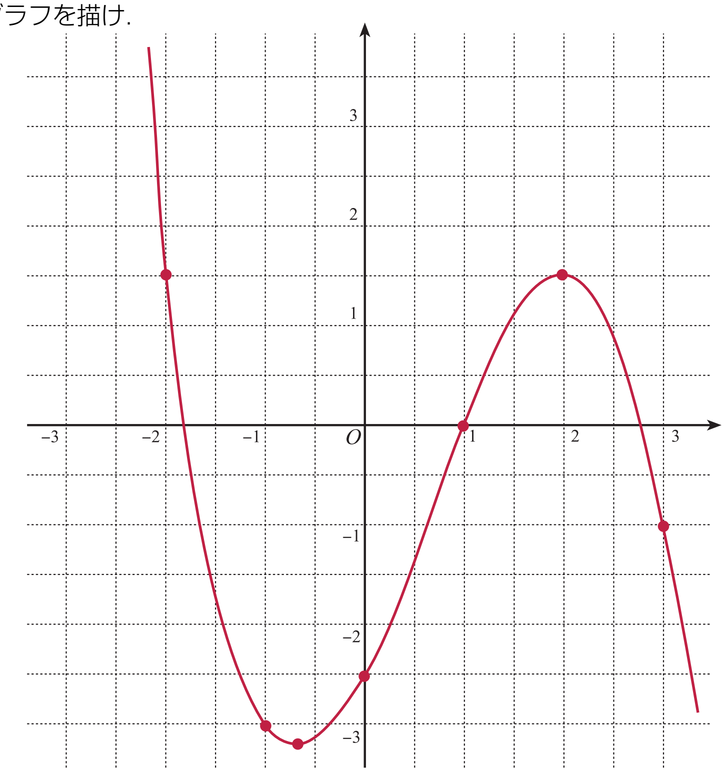
4 次の関数 $f(x)$ の増減表を書き，グラフを描け．

a) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^3 + x^2 + 2x - \dfrac{5}{2}$

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 2x + 2$$
$$= -\frac{1}{2}(3x^2 - 4x - 4)$$
$$= -\frac{1}{2}(3x + 2)(x - 2)$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}, 2$$
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < x < 2$$

x	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{175}{54}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$

$$\left(\begin{array}{lll} f(-2) = \frac{3}{2}, & f(-1) = -3, & f(0) = -\frac{5}{2} \\ f(1) = 0, & f(2) = \frac{3}{2}, & f(3) = -1 \end{array}\right)$$



b) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + x - 1$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x + 1$$
$$= \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{6}$$

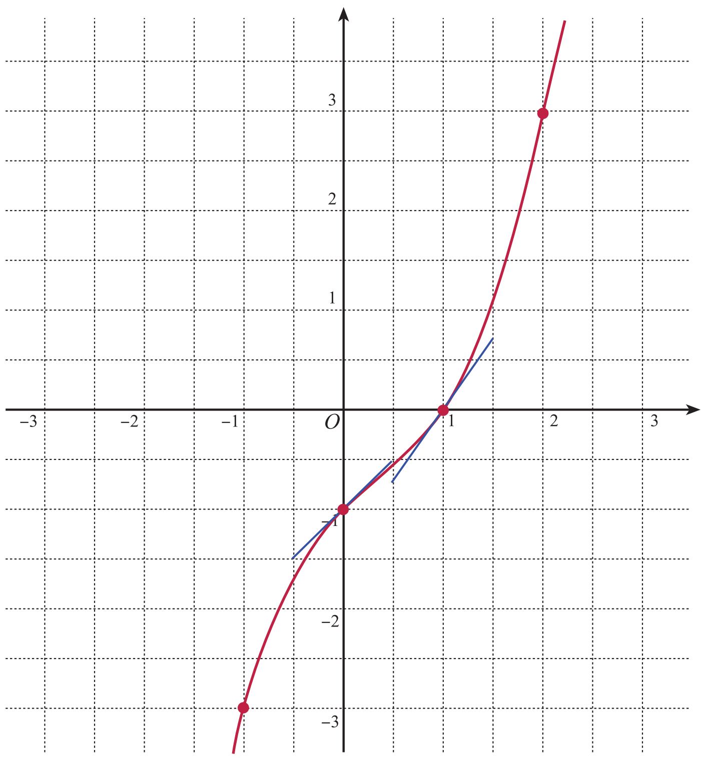
したがって，すべての実数について

$f'(x) > 0$

増減表は

x	$\cdots$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

$$\left(\begin{array}{ll} f(-1) = -3, & \\ f(0) = -1, & f'(0) = 1 \\ f(1) = 0, & f'(1) = \frac{3}{2}, \\ f(2) = 3 & \end{array}\right)$$



5 底面の半径が a，高さが h の直円柱がある．

a) この直円柱の表面積を求めよ．

表面積 $S = 2 \times ($ 底面積$) + ($ 側面積$) = 2\pi a^2 + 2\pi ah = 2\pi(a^2 + ah)$

b) この直円柱の表面積が 8π であるとき，この直円柱の体積を a を用いて表せ．

$$S = 8\pi \Leftrightarrow 2\pi(a^2 + ah) = 8\pi \Leftrightarrow a^2 + ah = 4 \Leftrightarrow h = \frac{4 - a^2}{a}$$
$$V = \pi a^2 h = \pi a^2 \frac{4 - a^2}{a} = \pi a(4 - a^2)$$

c) 表面積が 8π である直円柱のうちで，体積が最大となるものの底面の半径と高さを求めよ．

a, h は長さなので，正の値をとるから，$a > 0$ かつ $\frac{4-a^2}{a} > 0$．よって a の取り得る範囲は $0 < a < 2$.

$V = \pi(4a - a^3)$ より $V' = \pi(4 - 3a^2)$

$V' = 0 \Leftrightarrow 4 - 3a^2 = 0$ かつ $a > 0$ より，$a = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$V' > 0 \Leftrightarrow 4 - 3a^2 > 0$ かつ $0 < a < 2$ より，$0 < a < \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

a	0	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	2
V'	$+$	$+$	0	$-$	$-$
V	0	$\nearrow$	最大	$\searrow$	0

右の増減表より，V は $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき最大で，

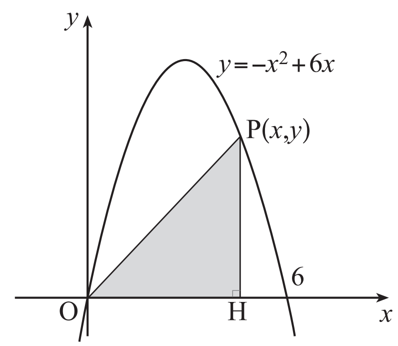
そのとき，$h = \dfrac{4-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

(答) 底面の半径 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，高さ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ のとき体積は最大になる．(最大値 $V = \frac{16\sqrt{3}}{9}\pi$)

6 右図のように関数

$$y = -x^2 + 6x \quad (0 \leqq x \leqq 6)$$

のグラフ上の点 $P(x, y)$ から x 軸に垂線 PH を下ろす．このとき，△POH の面積を最大にする x の値と面積の最大値を求めよ．



△POH ができる x の範囲は $0 < x < 6$

△POH の面積を S とおくと，

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{OH} \cdot \mathrm{PH} = \frac{1}{2}x(-x^2 + 6x) = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2$$
$$S' = -\frac{3}{2}x^2 + 6x = -\frac{3}{2}x(x - 4)$$
$$S' = 0 \Leftrightarrow x = 0, 4, \qquad S' > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4$$

a	0	$\cdots$	4	$\cdots$	6
S'	0	$+$	0	$-$	$-$
S	0	$\nearrow$	16	$\searrow$	0

右の増減表より，S は $x = 4$ のとき最大で，最大値は 16

(答) $x = 4$ のとき △POH の面積は最大になり，最大値は 16.

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)