入学年度		学部	学 科		組		番 号			検	フリガナ	
		B		1							氏 名	

● 高次微分を用いた近似計算

関数 $f(x)$ において，a での値 $f(a)$ がわかっているとき，それから微少量 h だけ変化させたときの値 $f(a+h)$ の近似値を求めることを考える．前回見たように，$f(a+h)$ は

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h) \tag{1}$$

という形で 1 次近似できる．したがって，$f(a+h) \fallingdotseq f(a) + f'(a)h$ として近似値が計算できるはずである．例えば，$f(x) = \sqrt{x}$ としたとき，$f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ であるから，$a = 1$，$h = 0.01$ とすると，$f'(1) = \dfrac{1}{2}$ であり，

$$\sqrt{1.01} = \sqrt{1+0.01} \fallingdotseq 1 + \frac{1}{2} \times 0.01 = 1.005$$

とできるはずである．しかし，(1) 式は $h \to 0$ としたときの極限の様子を示すに過ぎず，h がある決まった値，例えば $h = 0.01$ であるときの「真の値」$f(a+h)$ と「近似値」$f(a) + f'(a)h$ との間の「誤差」

$$\varepsilon(h) = f(a+h) - \bigl(f(a) + f'(a)h\bigr)$$

がどの程度の大きさの値なのかについては何も表していない．一般に，近似値を計算するとき，誤差 $\varepsilon(h)$ がどれくらいの範囲に収まっているかがわからないと近似値は本当の価値を持たない．

そこで，前回漸近展開を導いた方法をもう一度見直してみる．まず，

$$\int_0^h f'(a+x)\,dx = \Bigl[f(a+x)\Bigr]_0^h = f(a+h) - f(a)$$

を書き直した式

$$f(a+h) = f(a) + \int_0^h f'(a+x)\,dx \tag{2}$$

から始める．ここで，$f(x)$ は 2 階微分可能であると仮定し，最後の積分を部分積分を用いて計算する．部分積分の公式 $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \bigl[u(x)v(x)\bigr]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$ において，$u(x) = f'(a+x), v'(x) = 1$ とみなし，さらに，$v(x) = x$ ではなく $v(x) = x - h$ とすることにより，次の式を得る．

$$\begin{aligned}\int_0^h f'(a+x)\,dx &= \Bigl[f'(a+x)(x-h)\Bigr]_0^h - \int_0^h (x-h)f''(a+x)\,dx \\ &= f'(a)h - \int_0^h (x-h)f''(a+x)\,dx. \end{aligned} \tag{3}$$

(2)，(3) を合わせて，次の式を得る．

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h - \int_0^h (x-h)f''(a+x)\,dx \tag{4}$$

いま，誤差を $R_2(h) = f(a+h) - \bigl(f(a) + f'(a)h\bigr)$ と定義すると，(4) より

$$R_2(h) = f(a+h) - \bigl(f(a) + f'(a)h\bigr) = \int_0^h (h-x)f''(a+x)\,dx$$

ここで，$f''(a+x)$ は 0 と h の間において，2 つの数 m, M を用いて

$$m \leqq f''(a+x) \leqq M$$

と表せるとする．（例えば，M を $f''(x)$ が 0 と h の間の最大値 M，m を最小値とすればよいが，必ずしも厳密な最大・最小値を求める必要はない．）いま，$h > 0$ と仮定すると，x が 0 と h の間で $h - x > 0$ だから，$m(h-x) \leqq (h-x)f''(a+x) \leqq M(h-x)$ が成り立つので，

$$\int_0^h m(h-x)\,dx \leqq \int_0^h (h-x)f''(a+x)\,dx \leqq \int_0^h M(h-x)\,dx$$

を得る．したがって，

$$\frac{m}{2}h^2 \leqq R_2(h) \leqq \frac{M}{2}h^2 \tag{5}$$

が成り立つ．$h < 0$ のときも同じ式を示すことができる．この不等式 (5) は誤差を**評価する**式という．

例 1. $f(x) = \sqrt{x}$，$a = 1$，$h = 0.01$ としたとき，上で見たように $\sqrt{1+0.01} \fallingdotseq 1.005$ である．この場合

$$f''(1+x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}}$$

となる．，$h = 0$ のとき最小値 $m = -\frac{1}{4}$，$h = 0.01$ のとき最小値 $M = -\frac{1}{4\sqrt{1.01}}$ をとる．ここで M の正確な値はわからないが，少なくとも $M < 0$ であることは確かなので，$-\frac{1}{4} \leqq f''(1+x) \leqq 0$ が成り立つこ．これより，$\sqrt{1+0.01}$ の値について次の不等式が得られる．

$$\begin{gathered}\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right) \times 0.01^2 \leqq R_2(0.01) \leqq \frac{M}{2} \times 0.01^2 < 0 \\ -0.000125 \leqq \sqrt{1+0.01} - 1.005 < 0 \\ \therefore 1.0049875 \leqq \sqrt{1+0.01} < 1.005 \end{gathered}$$

［電卓で $\sqrt{1.01}$ を計算すると，1.004987562 . . . となり，下限に近いことが分かる.］

さらに近似の精度を上げるために，**2 次近似式**を用いて計算することを考える．いま，$f(x)$ が 3 回微分可能であると仮定し，(4) 式の最後の積分をさらにもう一度部分積分することによって，次の式を得る．

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{1}{2}\int_0^h (x-h)^2 f'''(a+x)\,dx \tag{6}$$

先ほどと同様に，誤差を $R_3(h) = f(a+h) - \left(f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2\right)$ と定義すると，$R_3(h) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^h (x-h)^2 f'''(a+x)\,dx$ となる．さらに，$f'''(a+x)$ が 0 と h の間で

$$m \leqq f'''(a+x) \leqq M$$

をみたすとすると，$\frac{1}{2}m(x-h)^2 \leqq \frac{1}{2}(x-h)^2 f'''(a+x) \leqq \frac{1}{2}M(x-h)^2$ が成り立つので，

$$\frac{1}{2}\int_0^h m(x-h)^2\,dx \leqq \frac{1}{2}\int_0^h (x-h)^2 f'''(a+x)\,dx \leqq \frac{1}{2}\int_0^h M(x-h)^2\,dx$$

が得られる．両端の積分を計算して，

$$\frac{m}{6}h^3 \leqq R_3(h) \leqq \frac{M}{6}h^3 \tag{7}$$

というの評価式が得られる．

例 2. $\sqrt{65} = \sqrt{64+1} = 8\sqrt{1+\frac{1}{64}}$ なので $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$, $h = \frac{1}{64}$ とおいて，近似値とそのときの誤差を求めてみる．まず，微分を計算すると，

$$f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}, \qquad f''(1) = \frac{-1}{4(1)^{3/2}} = -\frac{1}{4}, \qquad f'''(1+x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}}$$

となる．したがって，近似値は

$$\sqrt{65} = 8\sqrt{1+\frac{1}{64}} \fallingdotseq 8\left(f(1) + f'(1)\frac{1}{64} + \frac{f''(1)}{2!}\left(\frac{1}{64}\right)^2\right) = 8.0622558\ldots \tag{8}$$

また，$0 \leqq x \leqq \frac{1}{64}$ のとき，$(1+\frac{1}{64})^{5/2} \geqq (1+x)^{5/2} \geqq (1+0)^{5/2} = 1$ であるから，

$$0 < \frac{3}{8(1+\frac{1}{64})^{5/2}} \leqq f'''(1+x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}} \leqq \frac{3}{8(1+0)^{5/2}} = \frac{3}{8}$$

を得る．（すなわち，$f'''(1+x)$ は $x = 0$ のとき最大値 $M = \frac{3}{8}$ をとる．一方，最小値 m については正確な値はよくわからないが，0 より大きいことはすぐにわかる．）(8) 式の近似の誤差は $8R_3(\frac{1}{64})$ だから，(7) の不等式を 8 倍して

$$0 \leqq 8\,R_3\left(\frac{1}{64}\right) \leqq 8\frac{\left(\frac{3}{8}\right)}{6}\left(\frac{1}{64}\right)^3 \fallingdotseq 0.00000190\ldots$$

と評価できる．すなわち，

$$8.0622558\ldots \leqq \sqrt{65} \leqq 8.0622558\ldots + 0.0000019\ldots = 8.0622577\ldots$$

となる．これより，$\sqrt{65}$ の小数点以下第 5 位までの値は 8.06225 であることが結論できる．

ここからさらに続け，高次近似式とその誤差の評価について考える．以下，関数 $f(x)$ は何回でも微分可能な関数とする．まず，$\int_0^h f'(a+x)\,dx = \Big[f(a+x)\Big]_0^h = f(a+h) - f(a)$ を書き直した式 $f(a+h) = f(a) + \int_0^h f'(a+x)\,dx$ から始め，これまでと同様に部分積分を繰り返し用いて計算すと，

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \int_a^h (h-x)xf''(a+x)\,dx$$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{1}{2}\int_0^h (h-x)^2 f'''(a+x)\,dx$$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{1}{3!}\int_0^h (h-x)^3 f^{(4)}(a+x)\,dx$$

$$\cdots$$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(0)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^h (h-x)^{n-1} f^{(n)}(a+x)\,dx$$

が得られる．ここで，$f^{(k)}(x)$ は $f(x)$ を k 回微分した関数である．これより，$f(a+h)$ は h の $(n-1)$ 次式で近似され，最後の積分が誤差であるとみることができる．すなわち，誤差は次のように表せる．

$$R_n(h) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^h (h-x)^{n-1} f^{(n)}(x)\,dx \tag{9}$$

いま，$h > 0$ と仮定し，$f^{(n)}(x)$ が $0 \leqq x \leqq h$ において，2 つの実数 m, M を用いて

$$m \leqq f^{(n)}(x) \leqq M$$

とできるとする．たとえば，$f^{(n)}(x)$ の最大値，最小値が求まれば，それらを M，m とすればよいが，それらの正確な値がわからない場合は大雑把な “評価” を用いればよい．このとき，各辺に $(h-x)x^{n-1}$ を掛けて 0 から h まで積分すると，この積分区間内で $(h-x)^{n-1} \geqq 0$ だから，次の不等式が成り立つ．

$$\int_0^h m(h-x)^{n-1}\,dx \leqq \int_0^h (h-x)^{n-1} f^{(n)}(a+x)\,dx \leqq \int_0^h M(h-x)^{n-1}\,dx$$

$$\frac{m}{n}h^{n-1} \leqq \int_0^h (h-x)^{n-1} f^{(n)}(a+x)\,dx \leqq \frac{M}{n}h^{n-1}$$

したがって，$R_n(h)$ の定義式 (9) より，n が奇数なら $(-1)^{n-1} = 1$，n が偶数なら $(-1)^{n-1} = -1$ なので，

$$\frac{m}{n!}h^n \leqq R_n(h) \leqq \frac{M}{n!}h^n$$

が成り立つ．以上をまとめると次のようになる．

関数の高次近似

$f(x)$ を何回でも微分可能な関数とし，h を正の数とする．このとき，$f(a+h)$ は

$$f(a+h) \fallingdotseq f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1}$$

と近似でき，その誤差 $R_n(h)$ は，$f^{(n)}(a+x)$ が $0 \leqq x \leqq h$ において，$m \leqq f^{(n)}(a+x) \leqq M$ をみたすとすれば，次の不等式をみたす．

$$\frac{m}{n!}h^n \leqq R_n(h) \leqq \frac{M}{n!}h^n$$