2023 年 7 月 18 日

微分積分 I	入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	氏 名	
火曜２限 担当: 鍬田 政人								

- 筆記用具以外の持ち込みは不可.
- 最終的な答えだけを書くのではなく，途中の計算や説明も簡潔に加えること．これがない場合，大幅な減点をすることもある.

$\boxed{1}$ $f(x) = \dfrac{1}{(1-2x)^2}$ とする.

a) x が 0 から h まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率を求め，なるべく簡単な形で表せ.

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\frac{1}{(1-2h)^2}-\frac{1}{1^2}}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{(1-2h)^2}-1\right)$$
$$= \frac{1}{h}\left(\frac{1-(1-2h)^2}{(1-2h)^2}\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{1-(1-4h+4h^2)}{(1-2h)^2}\right)$$
$$= \frac{1}{h}\left(\frac{4h-4h^2}{(1-2h)^2}\right) = \frac{4-4h}{(1-2h)^2}$$

b) $f(x)$ の $x=0$ における微分係数 $f'(0)$ を極限による定義を用いて直接計算せよ.

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4-h}{(1-2h)^2} = 4$$

$\boxed{2}$ $f(x) = \dfrac{2x-5}{2x-3}$ とする.

a) $f(x)$ の定義域をを求めよ.

分母 $\neq 0$ より，$x \neq \frac{3}{2}$

b) $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求め，その定義域を求めよ.

$y = \dfrac{2x-5}{2x-3}$ を解く．$(2x-3)y = 2x-5$ より，$(2y-2)x = 3y-5$.

よって，$y \neq 1$ のとき解を持ち，$x = \dfrac{3y-5}{2(y-1)}$.

ここで，x と y を入れ換えて，$y = f^{-1}(x) = \dfrac{3x-5}{2(x-1)}$.

$f^{-1}(x)$ の定義域は $x \neq 1$.

c) $y = f(x)$ および，$y = f^{-1}(x)$ の値域を求めよ.

$f(x)$ の値域は b) の解を持つ条件より，$y \neq 1$.

$f^{-1}(x)$ の値域は $f(x)$ の定義域より，$y \neq \frac{3}{2}$.

d) $(f^{-1}\circ f)(x) = x$ が成り立つことを確かめよ.

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{3\frac{2x-5}{2x-3}-5}{2(\frac{2x-5}{2x-3}-1)} = \frac{3(2x-5)-5(2x-3)}{2((2x-5)-(2x-3))}$$
$$= \frac{-4x}{2(-2)} = x$$

e) 導関数 $f'(x)$ を求めよ.（定義に戻る必要はない.）

$$f'(x) = \left(\frac{2x-5}{2x-3}\right)' = \left(1-\frac{-2}{2x-3}\right)' = -2\left((2x-3)^{-1}\right)'$$
$$= -2\times(-(2x-3)^{-2})\times(2x-3)' = 4(2x-3)^{-2} = \frac{4}{(2x-3)^2}$$

f) $y = f(x)$ のグラフの $\big(3, f(3)\big)$ における接線の方程式を求めよ.

$f'(-1) = \dfrac{4}{(2\times 3-3)^2} = \dfrac{4}{9}$, $f(3) = \dfrac{1}{3}$ より,

$y = \frac{4}{9}(x-3)+\frac{1}{3} \Leftrightarrow y = \frac{4}{9}x-1$.

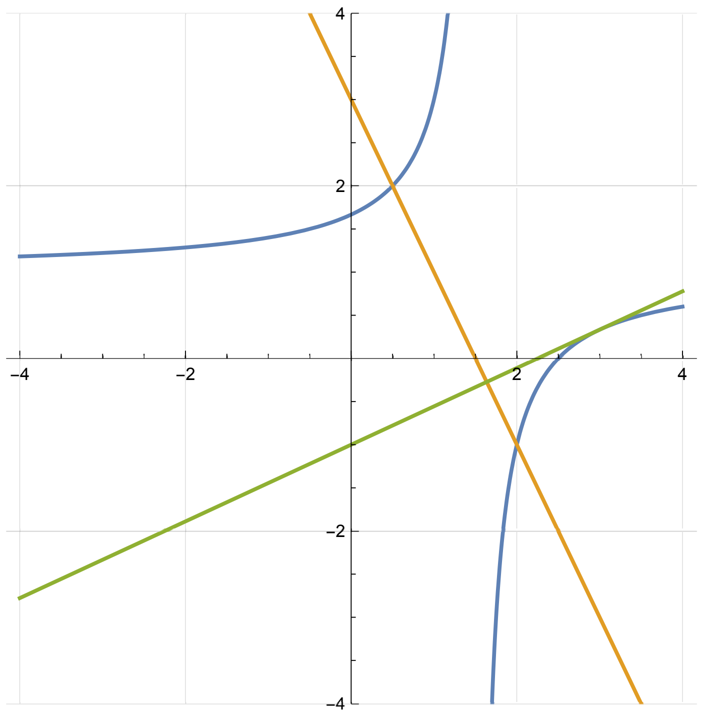
g) $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = -2x+3$ の交点を求めよ.

$\dfrac{2x-5}{2x-3} = -2x+3$ の分母を払って,

$2x-5 = -(2x-3)^2 \Leftrightarrow 4x^2-10x+4 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x-2) = 0$

$\therefore x = 2, \frac{1}{2}$．したがって，交点は $(2,-1), \left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

h) $y = f(x)$ のグラフとその $\big(3, f(3)\big)$ における接線，および直線 $y = -2x+3$ を下の座標平面内に描け.



i) グラフを利用して不等式 $\dfrac{2x-5}{2x-3} \leqq -2x+3$ を解け.

グラフより，$x \leqq \frac{1}{2}$ または，$\frac{3}{2} < x \leqq 2$.

【裏面につづく】
【２枚目につづく】

3 $f(x)=\sqrt{-2x+5}$ とする．以下の問いに答えよ．

a) 関数 $y=f(x)$ の定義域と値域を求めよ．

定義域： $x \leqq \frac{5}{2}$

値域：$y \geqq 0$

b) $y=f(x)$ の逆関数 $y=f^{-1}(x)$ を求め，その定義域と値域を述べよ．

$y=\sqrt{-2x+5}$ の両辺を 2 乗して $y^2=-2x+5$.

これを x について解くと $x=-\frac{1}{2}(y^2-5)$.

ここで，慣習に従って $y=f^{-1}(x)$ の形に表すために x と y を入れ換えて，

$y=-\frac{1}{2}(x^2-5)$.

すなわち，$f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}(x^2-5)$.

c) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．（定義に戻る必要はない．）

$f(x)=\sqrt{-2x+5}=(-2x+5)^{\frac{1}{2}}$ だから，

$f'(x)=\frac{1}{2}(-2x+5)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(-2x+5)'=-(-2x+5)^{-\frac{1}{2}}$

$=\dfrac{-1}{\sqrt{-2x+5}}$

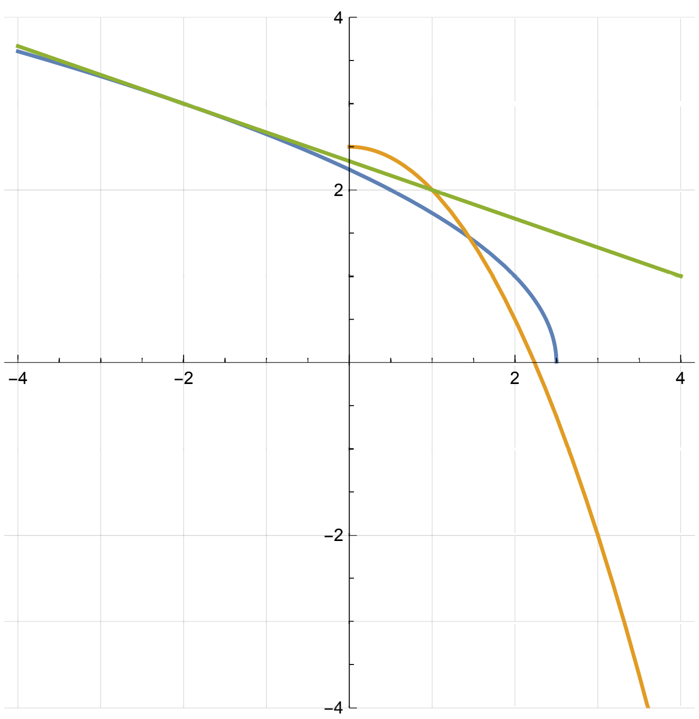
d) $y=f(x)$ のグラフの $\left(-2, f(-2)\right)$ における接線の方程式を求めよ．

$f'(-2)=\dfrac{-1}{\sqrt{-2(-2)+5}}=-\dfrac{1}{3}$ だから，

接線の方程式は $y-f(-2)=-\dfrac{1}{3}\left(x-(-2)\right)$．これを整理して，

$y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{7}{3}$.

e) $y=f(x)$ のグラフとその $\left(-2, f(-2)\right)$ における接線，および逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフの 3 つを右上の座標平面内に描け．



4 微分の公式 $\left(x^a\right)'=ax^{a-1}$ について，$a=n$ (n は整数) の場合と，$a=\dfrac{1}{n}$ (n は整数）の場合はすでに証明されているとする．このとき，$a=\dfrac{m}{n}$ (m，n は整数）の場合を合成関数の微分公式を用いて証明せよ．

$\begin{cases} y=u^m \\ u=x^{\frac{1}{n}} \end{cases}$ とおくと，すでに証明されていることから $\begin{cases} \frac{dy}{du}=mu^{m-1} \\ \frac{du}{dx}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} \end{cases}$

したがって，

$$\begin{aligned}(x^{\frac{m}{n}})' &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=mu^{m-1}\cdot\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\\ &=\frac{m}{n}(x^{\frac{1}{n}})^{m-1}\cdot x^{\frac{1}{n}-1}=\frac{m}{n}x^{\frac{m-1}{n}+\frac{1}{n}-1}\\ &=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}\end{aligned}$$

よって，$\left(x^a\right)'=ax^{a-1}$ は $a=\frac{m}{n}$ の場合にも成り立つ．

5 次の各々の関数の導関数を求めよ．

a) $f(x)=e^{\sqrt{1-x^2}}$

$$\begin{aligned}f'(x)&=e^{\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=e^{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(1-2x^2)'\\ &=\frac{-2xe^{\sqrt{1-x^2}}}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{xe^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

b) $f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{(\log x)'\cdot x^2-\log x\cdot(x^2)'}{x^4}\\ &=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-2x\log x}{x^4}=\frac{x-2x\log x}{x^4}\\ &=\frac{1-2\log x}{x^3}\end{aligned}$$

6 次の関数を対数微分法 (両辺の絶対値の自然対数を取って微分する方法) により微分せよ．

$$f(x)=\frac{x^2(x-1)}{x-2}$$

$\log|f(x)|=\log\left|\dfrac{x^2(x-1)}{x-2}\right|=2\log|x|+\log|x-1|-\log|x-2|$ だから，

これを微分して，

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{2x^2-7x+4}{x(x-1)(x-2)}$

$\therefore f'(x)=\dfrac{2x^2-7x+4}{x(x-1)(x-2)}\cdot\dfrac{x^2(x-1)}{x-2}=\dfrac{x(2x^2-7x+4)}{(x-2)^2}$

2023 年 7 月 18 日

微分積分 I	入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	氏 名	
火曜２限 担当: 鍬田 政人								

[6] $f(x) = (x^2+1)e^{-x}$ とする．

a) $f(x)$ の定義域を述べよ．

定義域は実数全体の集合 $\mathbb{R}$

b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

$f'(x) = (x^2+1)'e^{-x} + (x^2+1)\left(e^{-x}\right)' = 2xe^{-x} + (x^2+1)e^{-x}(-x)'$
$= (2x - x^2 - 1)e^{-x} = -(x-1)^2 e^{-x}$

c) $f'(x) = 0$ となる x と，$f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．

e^{-x} は常に正の値をとることに注意すると
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -(x-1)^2 e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$
$f'(x)$ は常に負の値をとるので，$f'(x) > 0$ となる x の範囲はなし（空集合）

d) $f(x)$ の 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

$f''(x) = \left(-(x-1)^2\right)'e^{-x} - (x-1)^2\left(e^{-x}\right)'$
$= -2(x-1)(x-1)'e^{-x} - (x-1)^2 e^{-x}(-x)'$
$= -2(x-1)e^{-x} + (x-1)^2 e^{-x} = \left(-2(x-1) + (x-1)^2\right)e^{-x}$
$= (x-1)(x-3)e^{-x}$

e) $f''(x) = 0$ となる x と，$f''(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 1, 3$
$f''(x) > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)e^{-x} > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) \Leftrightarrow x < 1, x > 3$

f) $f(x)$ の増減表を完成させよ．（増減だけでなくグラフの凹凸も調べ，曲がった矢印 ⤴ ↱ ⤷ ⤵ で表すこと．）

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	⤷	変曲点	⤵	変曲点	⤷

g) $f(x)$ が極大・極小となる x の値があればそれを求めよ．

極大・極小となる点はない．

h) $y = f(x)$ のグラフの変曲点の x 座標を求めよ．

$x = 1$ と $x = 3$

[7] a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ であることを用いて，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$ を求めよ．ただし，r は定数である．

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}} = e$ でもあるから，
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right)^r = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right)^r$
$= e^r$

b) 元本 A を年利 r の連続複利で運用すると，1 年後の元利合計は Ae^r となる．年利 4% ($r = 0.04$) の連続複利で運用した場合，元本がもとの 2 倍になるのはおよそ何年後か．$\log 2 = 0.693$ として計算せよ．

年利 $r = 0.04$ の連続複利で運用したとすると，n 年後の元利合計は $Ae^{0.04n}$．
したがって，元利合計が 2 倍になるのは n が $Ae^{0.04n} = 2A$ をみたすとき．
$e^{0.04n} = 2$ の log をとって，$0.04n = \log 2$．
$\therefore n = \frac{\log 2}{0.04} \fallingdotseq \frac{0.693}{0.04} \fallingdotseq 17.33$．すなわち，17 年 4 か月後

— 以上 —

【解答用紙が足らなければこの部分も使用して下さい】