

微分積分 II — 期末試験

2015 年 7 月 28 日

時間 60 分

- 筆記用具以外の持ち込みは不可.
- 最終的な答えだけを書くのではなく途中の計算や説明も書くこと. これがない場合, 大幅な減点をすることもある.

1 つぎの 2 変数関数について, 2 階の偏微分までをすべて計算せよ.

a) $f(x, y) = \frac{y}{1 - xy}$

b) $f(x, y) = (x - y)e^{-xy}$

2 関数 $f(x, y) = 3x^2 + 6xy + 3y + 3y^2 - y^3$ の臨界点 (すべての偏微分が 0 になる点) をすべて求め, 各臨界点において極大・極小を判定せよ.

3 底面の半径が r で高さが h の, 上面に蓋のない円筒形の缶がある.

- a) この缶を作るのに使用する材料の面積を S とするとき, S を r と h で表わせ.
- b) a を定数とする. 容積 V が一定値 $a^3\pi$ であるという条件の下で, 材料の面積 S が最小となるような r と h をラグランジュの乗数法で求めよ.

4 次の不定積分を求めよ.

a) $\int \frac{x}{\sqrt{1-2x}} dx$

b) $\int (x-2)e^{-x} dx$

5 $\sqrt{27} = 5\sqrt{1 + \frac{8}{100}}$ という表示と $\sqrt{1+x}$ の 2 次近似の式を用い $\sqrt{27}$ の近似値を求めよ. また, このようにして得られた近似値と $\sqrt{27}$ の値とは小数第何位まで一致するといえるか.

6 極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - xe^x}{x^2}$ を求めよ. ただし, 次の漸近展開の公式は自由に用いてよい.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$