

公式 $(x^a)' = ax^{a-1}$ が任意の有理数 a について成り立つことを証明することである。したがって、すでに証明された場合以外、この公式を用いて答えてはならない。

1 【 n が自然数の場合】 任意の自然数 n について $f_n(x) = x^n$ とおく。 $f_n'(x) = nx^{n-1}$ であることを数学的帰納法で証明したい。

(I) $n = 1$ のとき。 $f_1(x)$ を定義に従って計算すると

$$f_1'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} =$$

(II) $n = k$ のとき成り立つとすると、 $f_k'(x) = kx^{k-1}$ 。いま、 $f_{k+1}(x) = f_1(x)f_k(x)$ だから、積の微分公式を用いて、

$$f_{k+1}'(x) = (f_1(x)f_k(x))' =$$

[結論まできちんと述べよ。]

2 【 n が負の整数の場合】

a) 商の微分公式を用いて $\left(\frac{1}{x^n}\right)'$ を求めよ。

b) $(x^{-n})'$ を ax^b の形に表せ。

入学年度	学部	学科	組	番号	校	フリガナ
						氏名

3 【 $a = 1/n$ の場合】 $f(x) = x^n$ とすると、関数 $\sqrt[n]{x}$ は、関数 $f(x)$ の逆関数である。すなわち $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ である。

a) 逆関数の微分公式を用いて $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$ であることを示せ。

b) a) の結果を分数指数を用いて表すことにより $(x^{\frac{1}{n}})'$ を ax^b の形に表せ。

4 【 a が有理数の場合】 $x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}$ であることを用い、合成関数の微分公式を用いて $(x^{\frac{m}{n}})'$ を ax^b の形に表せ。

5 次関数を変数 x で微分せよ.

a) $f(x) = \frac{4x - 1}{x^2 + 3}$

$f'(x) =$

b) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^3 - 4}$

$f'(x) =$

c) $f(x) = \frac{4 - x^2}{x^2 - 2x + 3}$

$f'(x) =$

d) $f(x) = x^2 - \frac{3}{x - 2}$

$f'(x) =$

e) $f(x) = (2x^2 + 3x - 4)^3$

$f'(x) =$

f) $f(x) = \left(\frac{x^3}{3} + 2x - 5\right)^4$

$f'(x) =$

g) $f(x) = \sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}$

$f'(x) =$

h) $f(x) = \sqrt[4]{(x^2 + x + 1)^5}$

$f'(x) =$

i) $f(x) = (x + 1)\sqrt{2 - x}$

$f'(x) =$

j) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x+4}}$

$f'(x) =$

k) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$

$f'(x) =$

l) $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x}}$

$f'(x) =$