

復習問題 略解

1 a) $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{2}{3}$ b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2$ c) $y = 2x - 3$ d) 別紙参照

2 a) $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = -\sqrt{3} + 1$ b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -1$ c) $y = -x$ d) 別紙参照

3 a) 別紙グラフより, $0 < x < 1, 2 < x$ b) 別紙グラフより, $x \leq 1$

4 a) $(g \circ f)(x) = 1 + a - ax, (f \circ g)(x) = -\frac{x}{a}$.
 b) $(g \circ f)(x) = x$ がすべての x になつて成り立たなければいけないので, $1 + a - ax = x$ がすべての x について成り立つ. これより, $a = -1$. (このとき $(f \circ g)(x) = x$ も成り立つ.)

5 a) 定義域 $x \neq -2$, 値域 $y \neq 2$; 逆関数 $f^{-1}(x) = -\frac{2x+1}{x-2}$, 逆関数の定義域 $x \neq 2$, 値域 $y \neq -2$.
 b) 定義域 $x \leq 2$, 値域 $y \leq 0$; 逆関数 $f^{-1}(x) = 2 - x^2$, 逆関数の定義域 $x \leq 0$, 値域 $y \leq 2$.

6 次の関数を変数 x で微分せよ.

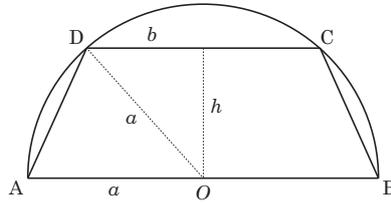
a) $f'(x) = 3(4x + 5)(2x^2 + 5x - 6)^2$ b) $f'(x) = (x - 1)^4 + 4x(x - 1)^3$
 c) $f'(x) = \frac{-4x}{(x^2 - 3)^3}$ d) $f'(x) = \frac{-2(3x^2 - 15x - 1)}{(3x^2 + 1)^2}$
 e) $f'(x) = \frac{3x^2 - x - 4}{2x\sqrt{x}}$ f) $f'(x) = \frac{1 - 3x}{2\sqrt{2-x}}$
 g) $f'(x) = -\frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{(x+4)^4}}$ h) $f'(x) = -\frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{(x + \sqrt{x^2-1})^2} = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}(x + \sqrt{x^2-1})}$
 i) $f'(x) = (1 - 2x)e^{-2x}$ j) $f'(x) = \frac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}}$
 k) $f'(x) = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$ l) $f'(x) = \frac{\log x - 2}{(\log x - 1)^2}$

7 別紙グラフ参照

8 a) 最大値 $\sqrt{2}$ ($x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき), 最小値 -1 ($x = -1$ のとき).
 b) 最大値 $e^{-2} = 0.135335\dots$ ($x = 1$ のとき), 最小値 -1 ($x = 0$ のとき).

9 $f(x) = \log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$ とおくと, $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1 - (1-x)(1+x)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}$. これより, $x > 0$ のとき, $f'(x) > 0$. したがって, $f(x)$ は $x > 0$ で増加する. また, $f(x) = 0$ だから, $x > 0$ のとき $f(x) > 0$ となる.

10 台形の高さを h とし、上底の長さ（辺 CD の長さ）を $2b$ とおくと、図のように $a^2 = b^2 + h^2$ が成り立つ。



したがって、 $b = \sqrt{a^2 - h^2}$ となる。このとき、 $S = \frac{2a + 2b}{2}h$ であるから、 $S = h(a + \sqrt{a^2 - h^2})$ 。

$$\frac{dS}{dh} = \frac{a\sqrt{a^2 - h^2} + a^2 - 2h^2}{\sqrt{a^2 - h^2}}$$

$\frac{dS}{dh} = 0$ となるのは $a\sqrt{a^2 - h^2} + a^2 - 2h^2 = 0$ のときであるが、 $a\sqrt{a^2 - h^2} = -a^2 + 2h^2$ の両辺を 2 乗して整理することにより、 $4h^4 = 3a^2h^2$ を得る。 $h > 0$ であることに注意して $\frac{dS}{dh} = 0$ となるのは $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ のとき。 $0 < h < a$ の範囲で S の増減表を書けば（省略）、 $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ のとき S が最大になることがわかり、 S の最大値は $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ 。