

1 2つの関数 $y = f(u)$ と $u = g(x)$ の合成関数 $y = f(g(x))$ の導関数を求めたい。

いま, u の増分 Δu に対する y の増分 Δy は

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$$

と書ける. この両辺を x の増分を Δx で割ると,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta x}$$

となる. これは

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

と書き直せる. いま

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} = f'(u)$$

であり, $\Delta x \rightarrow 0$ としたとき $\Delta u \rightarrow 0$ だから,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= f'(u) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \end{aligned}$$

ここで, $u = g(x)$ だから, $f'(u) = \frac{df}{du}$ と書き直せる. また, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = (f(g(x)))'$ であるから,

合成関数の微分公式

$$(f(g(x)))' = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

を得る.

2 合成関数の微分法を用いて次の関数を変数 x で微分せよ.

a) $f(x) = (2x + 3)^3$

$f'(x) =$

b) $f(x) = (x^2 - x + 1)^5$

$f'(x) =$

3 $(f(g(h(x))))'$ を求めよ.

4 a) 関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ の導関数を定義にしたがって求めよ. (復習)

b) 合成関数の微分法 $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$ において, $f(x) = \frac{1}{x}$ とする. このとき, $(f(g(x)))'$ を $g(x)$ および $g'(x)$ を用いて表せ.

c) $\left(\frac{1}{g(x)}\right)'$ に関する微分公式を再度導け.

5 関数 $f(x)$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ は $f(f^{-1}(x)) = x$ をみたす. この両辺を微分し, それを逆関数の導関数 $(f^{-1}(x))'$ について解くことにより, $(f^{-1}(x))'$ の微分公式を求めよ.

6 $f(x) = x^n$ とすると, 関数 $\sqrt[n]{x}$ は, 関数 $f(x)$ の逆関数である. すなわち $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ である. 問題 5 で得られた逆関数の微分公式を用いて $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$ であることを示せ.

7 問題 6 の結果を分数指数を用いて表すことにより $(x^{\frac{1}{n}})'$ の微分公式を求めよ.

8 $x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}$ であることを用いて $(x^{\frac{m}{n}})'$ を求めよ.

9 次の関数を変数 x で微分せよ.

a) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$

$f'(x) =$

b) $f(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^3$

$f'(x) =$

c) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

$f'(x) =$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x + 1}$

$f'(x) =$

e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$f'(x) =$

f) $f(x) = x^3\sqrt{2x + 1}$

$f'(x) =$