

1] 次のそれぞれの2次元ベクトル空間 \mathbf{R}^2 の部分集合は, \mathbf{R}^2 の部分空間とはならない. それぞれについて, 部分空間とはならない理由を反例をあげるにより示せ.

a) $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid 2x + 3y = 1 \right\}$

b) $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x^2 - y^2 = 0 \right\}$

c) $V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x \geq 0, y \geq 0 \right\}$

2] V, W がともに \mathbf{R}^n の部分空間であるとき, その共通部分

$$V \cap W = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x \in V, x \in W\}$$

もまた \mathbf{R}^n の部分空間であることを証明せよ.

3] n 次元ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ と (m, n) 型の行列 A の間の積について

$$A(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = A\mathbf{a} + A\mathbf{b}, \quad A(c\mathbf{a}) = cA\mathbf{a} \quad (c \text{ は実数})$$

をみたす. このことを用いて 1 次同次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解全体の集合

$$V = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

は \mathbf{R}^n の部分空間であることを証明せよ.

4] 連立 1 次方程式
$$\begin{cases} -x + 2y + 5z + 2w = 0 \\ x - y + z + w = 0 \\ x + 7z + 5w = 0 \end{cases}$$
 をみたす 4 次元ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ 全体からなる \mathbf{R}^4 の部分空間を V とする. V を $V = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r \rangle$ の形に表せ.

