

「復習問題」(12月7日配布) 略解

2011年12月14日

1 a) $3x - 1 = t$ とおくと, $x = \frac{t}{3} + \frac{1}{3}$. したがって, $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x-1}} dx = \int \frac{t+1}{3\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{9} \int (t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}) dt = \frac{2}{27} t^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{9} t^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{27} (3x-1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{9} (3x-1)^{\frac{1}{2}} + C$$

b) $\sqrt{3x-1} = t$ とおくと, $x = \frac{t^2}{3} + \frac{1}{3}$. したがって, $\frac{dx}{dt} = \frac{2t}{3}$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x-1}} dx = \int \frac{t^2+1}{3t} \cdot \frac{2t}{3} dt = \frac{2}{9} \int (t^2+1) dt = \frac{2}{27} t^3 + \frac{2}{9} t + C$$

$$= \frac{2}{27} (3x-1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{9} (3x-1)^{\frac{1}{2}} + C$$

2 a) $\int x(3x+2) dx = \int (3x^2+2x) dx = x^3 + x^2 + C$

b) $t = \log x$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$. これより形式的に $dt = \frac{1}{x} dx$.

$$\int \frac{1}{x \log x} dx = \int \frac{1}{\log x} \cdot \left(\frac{1}{x} dx\right) = \int \frac{1}{t} dt = \log t + C = \log(\log x) + C$$

c) $u = x + 1, v' = e^x$ とおいて, 部分積分 $\int uv' = uv - \int u'v$ を用いる. このとき $v = e^x$ であることに注意.

$$\int (x+1)e^x dx = (x+1)e^x - \int 1 \cdot e^x dx = (x+1)e^x - e^x + C = xe^x + C$$

d) 少しわかりにくいかもしれないが, $u = \log(x+1), v' = 1$ とおいて, 部分積分を用いる. このとき $v = x$ となることに注意.

$$\int \log(x+1) dx = x \log(x+1) - \int x \cdot \frac{1}{x+1} dx$$

$$= x \log(x+1) - \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$= x \log(x+1) - (x - \log x) + C = (x+1) \log(x+1) - x + C$$

3 a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 8xy^2 + 3y^3, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -8x^2y + 9xy^2 - 4y^3.$

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3(x+2y^2+1)^2, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 12y(x+2y^2+1)^2.$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}y^{\frac{3}{5}}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{3}{5}x^{\frac{2}{5}}y^{-\frac{2}{5}}.$

d) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{1+x^2+y^2}.$

4 a) まず, 臨界点を求めるために, 連立方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 12x + 2xy^2 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^2y - 2y = 0$$

を解く. 2番目の式から $y(x-1)(x+1) = 0$ が得られるので, $y = 0, x = 1, x = -1$ をそれぞれ最初の式に代入し, $(x, y) = (0, 0), (4, 0), (1, \pm 3\sqrt{2}/2), (-1, \pm\sqrt{30}/2)$ を得る. 次に「多変数関数の極大・極小」の2ページ目にある $D(x, y)$ を計算し, 同じ場所にある極大・極小の判定法を用いる.

$$D(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)\right)^2$$

$$= (6x - 12 + 2y^2)(2x^2 - 2) - (4xy)^2$$

$$= 4(3x^3 - 6x^2 - 3y^2x^2 - y^2 - 3x + 6)$$

- $D(0, 0) = 24 > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = -12 < 0$ であるから, $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で極大.
- $D(4, 0) = 360 > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(4, 0) = 12 > 0$ であるから, $f(x, y)$ は $(4, 0)$ で極小.
- $D(1, \pm 3\sqrt{2}/2) = -72 < 0$ なので, $(1, \pm 3\sqrt{2}/2)$ は鞍点(峠点).
- $D(-1, \pm\sqrt{30}/2) = -120 < 0$ なので, $(-1, \pm\sqrt{30}/2)$ は鞍点(峠点).

b) まず, 臨界点を求めると,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2} = 0$$

$$\iff 1-x^2+y^2 = 0 \quad \text{かつ} \quad -2xy = 0$$

$$\iff (x, y) = (1, 0) \quad \text{または} \quad (-1, 0)$$

2階微分を計算し, 極大・極小を判定すると以下ようになる.

- $D(1, 0) = \frac{1}{4} > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) = -\frac{1}{2} < 0$ であるから, $f(x, y)$ は $(1, 0)$ で極大.
- $D(-1, 0) = \frac{1}{4} > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 0) = \frac{1}{2} > 0$ であるから, $f(x, y)$ は $(-1, 0)$ で極小.

c) まず、臨界点を求めると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= (1 + xy - y^2)e^{xy} = 0, & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= (-1 + x^2 - xy)e^{xy} = 0 \\ \iff & 1 + xy - y^2 = 0 \quad \text{かつ} \quad -1 + x^2 - xy = 0 \\ \iff & (x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{または} \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

2階微分を計算し、極大・極小を判定すると以下ようになる。

- $D\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{4}{e} < 0$ なので $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ は鞍点 (峠点)。
- $D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{4}{e} < 0$ なので $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ も鞍点 (峠点)。

5) $L(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 + xy + y^2 - 1)$ とおく。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) &= y - \lambda(2x + y) = 0, & \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) &= x - \lambda(x + 2y) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) &= x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

最初の2式から λ を消去すると $(y-x)(y+x) = 0$ が得られる。 $y = x$ を第3式に代入すると $3x^2 - 1 = 0$ となり $(x, y) = \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ (複合同順、以下同様) が得られる。また、 $y = -x$ を第3式に代入すると $x^2 - 1 = 0$ となり、 $(x, y) = (\pm 1, \mp 1)$ が得られる。 $(x, y) = \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ での xy の値は $\frac{1}{3}$ であり、 $(x, y) = (\pm 1, \mp 1)$ での xy の値は -1 であるから、最大値は $\frac{1}{3}$ 、最小値は -1 となる。

6) a) 箱の底辺の縦と横の長さはそれぞれ、 $x - 2z$ 、 $y - 2z$ であり、箱の高さは z である。ボール紙の面積は一定値 a^2 という条件より $xy = a^2$ 。これを用いて y を消去して、

$$V = (x - 2z)(y - 2z)z = (x - 2z)\left(\frac{a^2}{x} - 2z\right)z$$

b) $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0$ を解けばよい。

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -2z^2\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right), \quad \frac{\partial V}{\partial z} = a^2 - 4z\left(x + \frac{a^2}{x}\right) + 12z^2,$$

となり、 D 内においては V の臨界点は $(x, z) = \left(a, \frac{a}{6}\right)$ のみであることがわかる。

c) $(x, z) = \left(a, \frac{a}{6}\right)$ のとき、 $V = \frac{2a^3}{27}$ となる。また、このとき $y = a$ でもある。したがって、箱の寸法は、縦 $\frac{2a}{3}$ 、横 $\frac{2a}{3}$ 、高さ $\frac{a}{6}$ ということになる。

d) $L(x, y, z) = V(x, y, z) - \lambda(xy - a^2) = (x - 2z)(y - 2z)z - \lambda(xy - a^2)$ とおく。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= (y - 2z)z - \lambda y, & \frac{\partial L}{\partial y} &= (x - 2z)z - \lambda x, \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= xyz - 2(x + y)z^2 - z^3, & \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= xy - a^2 \end{aligned}$$

最初の2つの式から $z(y-x) = 0$ を得る。まず、 $z = 0$ とすると、 $V = 0$ となり、 V は最大にはならないので、不可。

次に $y = x$ とする。これを第3式に代入すると、 $(x - 2z)(x - 6z) = 0$ となる。ここで、 $x = 2z$ のときも $V = 0$ となるので不可。よって $x = 6z$ 。さらに、 $y = x$ を第4式に代入すると $x = y = a$ 。すなわち、 $x = y = a$ 、 $z = \frac{a}{6}$ のとき V は最大となる。このとき、箱の底面は一辺 $x = \frac{2}{3}a$ の正方形で、高さは $\frac{a}{6}$ となる。

7) a) 表面積 $S = xy + 2xz + 2yz$ 、体積 $V = xyz$ 。最初の式を用いて、 z を消去して

$$V = \frac{xy(S - xy)}{2(x + y)}$$

b) $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2(S - x^2 - 2xy)}{2(x + y)^2} = 0$ 、 $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2(S - 2xy - y^2)}{2(x + y)^2} = 0$

を解けばよい。まず、 $S - x^2 - 2xy = S - 2xy - y^2 = 0$ 、 $x \neq y$ より、 $x = y$ が得られる。これより、 $x = y = \sqrt{\frac{S}{3}}$ 。このとき、 $z = \frac{S - xy}{2(x + y)} = \sqrt{\frac{S}{12}}$ 。すなわち、底面が正方形で、高さが底面の一辺の長さの2分の1のとき、体積は最大になる。

注 $L(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(xy + 2xz + 2yz - S)$ において Lagrange の乗数法を用いても解ける。

8) 「高次微分を用いた近似計算」の例と同様。

まず2次近似の式を用いて近似値を計算する。

$$\sqrt{7} = \frac{5}{2}\sqrt{1 + \frac{12}{100}} \approx \frac{5}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{12}{100} - \frac{1}{8}\left(\frac{12}{100}\right)^2\right) = 2.6455$$

このときの誤差は $\frac{5}{2}R_3\left(\frac{12}{100}\right)$ であり、

$$\frac{5}{2}\left|R_3\left(\frac{12}{100}\right)\right| \leq \frac{5}{32}\left(\frac{12}{100}\right)^3 = 0.00016$$

が成り立つ。すなわち、 $-0.00027 \leq \frac{5}{2}R_3\left(\frac{12}{100}\right) \leq 0.00027$ 。となり、したがって、

$$2.64523 \leq \sqrt{7} \leq 2.64577$$

を得る。よって、得られた近似値と $\sqrt{7}$ の値とは小数第3位までは必ず一致するといえる。