

## 基礎数学 A2 — 期末試験

2011 年 1 月 7 日

時間 60 分

- 筆記用具以外の持ち込みは不可.
- 最終的な答えだけを書くのではなく途中の計算や説明も書くこと. これがない場合, 大幅な減点をすることもある.
- $\boxed{1}$   $\boxed{2}$  は解答用紙の所定の位置に記入すること.

$\boxed{1}$   $f(x) = -\sqrt{-2x+3}$  とする. 以下の問いに答えよ.

- 関数  $y = f(x)$  の定義域と値域を求めよ.
- $x$  が 1 から  $\frac{3}{2}$  まで変化するときの  $f(x)$  の平均変化率を求めよ.
- $f(x)$  の導関数を求めよ.
- $x = 1$  における  $f(x)$  の微分係数  $f'(1)$  を求めよ.
- $y = f(x)$  のグラフの  $(1, -1)$  における接線の方程式を求めよ.
- $y = f(x)$  の逆関数  $y = f^{-1}(x)$  を求めよ.
- 逆関数  $y = f^{-1}(x)$  の定義域と値域を求めよ.
- $y = f(x)$  のグラフ,  $y = f(x)$  の  $(1, -1)$  における接線, 逆関数  $y = f^{-1}(x)$  のグラフ, および直線  $y = -2x - 3$  の 4 つを解答用紙の座標平面内に描け.
- グラフを利用して不等式  $-\sqrt{-2x+3} > -2x - 3$  を解け.

$\boxed{2}$  関数  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - 2x^2 - 2x + \frac{4}{3}$  の増減とグラフの凹凸を調べ, そのグラフの概形を描け. また,  $f(x)$  の極大値・極小値とグラフの変曲点を求めよ.

【ヒント】  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  ともに因数分解できる. とくに,  $f'(x)$  は  $x+2$  で割り切れる.

$\boxed{3}$   $f(x) = \frac{x+5}{x+3}$  とする. 以下の問いに答えよ.

- $x = 1$  における  $f(x)$  の微分係数  $f'(1)$  を定義にしたがって (極限を直接計算することによって) 求めよ.
- $y = f(x)$  のグラフは  $y = \frac{k}{x}$  のグラフを  $x$  軸方向に  $p$ ,  $y$  軸方向に  $q$  だけ平行移動した曲線である.  $k$ ,  $p$ ,  $q$  は何かを答えよ.
- $y = f(x)$  の逆関数  $y = f^{-1}(x)$  を求めよ.
- 関数  $y = f(x)$  の定義域と値域, および逆関数  $y = f^{-1}(x)$  の定義域と値域を求めよ.
- $g(x) = \frac{-3x+3}{x+1}$  とする. 合成関数  $(g \circ f)(x)$  と  $(f \circ g)(x)$  を求めよ.

$\boxed{4}$  次の各々の関数の導関数を求めよ.

- $f(x) = (3x^2 + 2x + 1)^5$
- $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$
- $f(x) = \frac{1}{1-\sqrt{x}}$
- $f(x) = \sqrt[3]{1-2x^4}$
- $f(x) = (x+1)e^{-x^2}$
- $f(x) = \frac{\log x}{x}$

【裏に続く】

5  $f(x) = xe^{-x+2}$  とする.  $0 \leq x \leq 2$  の範囲での  $f(x)$  の最大値と最小値を求めよ.

6 【ボーナス問題】  $0 < x < 1$  のとき, 不等式  $\log(1+x) < \frac{x}{1-x}$  が成り立つことを証明せよ.

— 2222 —