

数学特別講義 I・数学特論 I — 在宅中間試験

出題：2010 年 12 月 7 日

提出日時：12 月 14 日の授業開始前

- ノート・参考書などは参照してもよいが、人とは相談せず、独力で解答すること。
- 最終的な答えが導けなくてもできるところまで解答すること。逆に、最終的な解答だけを書いて途中の計算や説明がない場合、大幅な減点をすることもある。
- 定義体はすべて複素数体 \mathbf{C} とする。

1] Q_1 を $Y^2 - 6YZ - 8XZ - 3Z^2 = 0$ で定義される 2 次曲線とし、 Q_2 を $YZ - X^2 = 0$ で定義される 2 次曲線とする。このとき $\lambda Q_1 + \mu Q_2 = 0$ で定義される 2 次曲線の族に含まれる 2 次曲線で退化したものをすべて求めよ。

2] 射影幾何学では、「円」とは \mathbf{P}^2 内の非退化な二次曲線で 2 点 $(1 : \pm i : 0)$ を通るものとして定義される。 $U = \{(X : Y : Z) \mid Z \neq 0\}$ を \mathbf{P}^2 から無限遠直線を除いた集合とする。 P_1, P_2, P_3 を U の相異なる 3 点とすると、 P_1, P_2, P_3 を通る円が存在するための必要十分条件はこれらの 3 点が同一直線上にないことであることを証明せよ。

3] C_1, C_2 を以下の方程式で定義される \mathbf{P}^2 内の 3 次曲線とする。

$$C_1 : F_1(X, Y, Z) = X^3 - 4XZ^2 + 2Y^3 - 18YZ^2 = 0,$$

$$C_2 : F_2(X, Y, Z) = 3X^3 - 12XZ^2 - Y^3 + 9YZ^2 = 0.$$

- 1) C_1 と C_2 の交点をすべて求めよ。
- 2) λ をパラメータとする平面曲線の族を

$$C_\lambda : F_1(X, Y, Z) + \lambda F_2(X, Y, Z) = 0$$

と定義する。次の各々の点について、その点を通るような C_λ を求めよ。また、それが既約であるかどうかを調べよ。

a) $(2 : 1 : 1)$

b) $(2 : 3 : 2)$

c) $(1 : 1 : 1)$

4] C を $X^3 + Y^3 + Z^3 - 5XYZ = 0$ で定義される 3 次曲線とする。 $(-1 : 1 : 0)$ を単位元 O に選び、 C 上の点の集合に群構造を定義する。

- a) $P = (X : Y : Z)$ を任意の点とすると、 $-P$ を求めよ。
- b) $T = (-1 : 0 : 1)$ とするとき、 $3T = O$ であることを示せ。
- c) $P = (X : Y : Z)$ を任意の点とすると、 $P + T$ を求めよ。
- d) $2P = O$ となる点をすべて求めよ。