

$K3$ 楕円曲面とその Mordell-Weil 格子

鎌田 政人

1. はじめに

代数体 k 上で定義された楕円曲線の Mordell-Weil 群, すなわち k -有理点全体のなす群が有限生成アーベル群になることはよく知られているが, 楕円曲線をいろいろ変えたときその階数がどれくらい大きくなりうるか, という素朴な疑問には今のところ答が得られていない. これと同様な問題を楕円曲面で考えることができるが, 楕円曲面の Mordell-Weil 群には格子の構造が入ることが知られているので, 問題は楕円曲面をいろいろ変えたとき, どのような型の格子が現われるかというふうに精密化できる. この問題は, 階数の高い楕円曲線を探す際の基礎になる一方, 正標数の場合には球面の詰め込みに関する問題に応用があることが知られている.

さて, 楕円曲面が有理曲面であるときには, この問題はこれ以上望めない形で完全に解決されている (小木曾-塩田 [13]). しかしながら, 曲面がある意味で有理曲面の次に簡単な, $K3$ 曲面の場合については状況が一変し, 問題は一気に難しさを増す. 定義体が複素数体の場合には, Cox [4] によって, 0 から 18 までのすべての整数について, Mordell-Weil 群の階数がその整数になるような $K3$ 楕円曲面の存在が示されているが, その証明は周期写像の全射性をもとにしたもので, その方法で曲面を具体的に構成することは難しい. 本稿では, これとは別の方法で Mordell-Weil 群の階数が 0 から 18 までの与えられた整数になるような $K3$ 楕円曲面の定義式を具体的に書き下すことを試みる. この方法で, 15 を除いたすべての場合には非常に具体的な結果が得られ, 定義体も有理数体とすることができる. また, 15 の場合には その構成法の指針を与える.

ここで述べる構成法は超越的方法で証明される 猪瀬の定理 (定理 3.1) に基づいているので, 残念ながら構成された楕円曲面の切断をその構成法から直接求めることや Mordell-Weil 格子の型を決めることは難しく, 今後の課題として残る. 塩田徹治氏の東京大学における 7 月の談話会での講演では, ここで構

成された Mordell-Weil 格子の球面の詰め込み問題との関連が考察され、密度に関する予想が述べられている。

数論からの興味としては、ここで構成された楕円曲面の中で、有理数体上定義された切断の全体からなる Mordell-Weil 群の部分群の階数ができるだけ大きくなるものを探ることが問題となる。K3 楕円曲面であって有理数体上の Mordell-Weil 群の階数が現在知られている中で最も大きいのは、長尾 [11] による 12 のようである。([11] の中では、この K3 楕円曲面は構成の途中の段階で現われるものであり、それが K3 曲面であることは明言されていない。) 長尾による構成は Mestre [9][10] の方法に基づいており、我々の用いる方法とはかなり趣を異にしているが、これら別々の構成法で得られた K3 楕円曲面の幾何学的性質を比べてみることは興味ある問題である。

2. 楕円曲面

本稿を通じて定義体 k は複素数体 \mathbb{C} の部分体とする。これは本稿で一番重要な補題となる 猪瀬の定理 (定理 3.1) の適用範囲のためである。しかしながら、数論への応用を視野に入れて、 k は代数的閉体とは仮定しない。

我々が考える楕円曲面とは次の様なものである。まず、 $\pi: X \rightarrow C$ を代数曲面 X から代数曲線 C への全射とする。すべては k 上定義されているものとし、 X, C とともに固有かつ滑らかとする。 C の生成点を η とし、 X_η で η における π のファイバーを表わす。

定義 2.1. 三つ組 $\mathcal{E} = (X, C, \pi)$ が楕円曲面であるとは、生成点におけるファイバー X_η が $k(C)$ 上の非特異な種数 1 の曲線になることである。

$\mathcal{E} = (X, C, \pi)$ が楕円曲面なら、 C のほとんどすべての点 x におけるファイバー $\pi^{-1}(x)$ は非特異な種数 1 の曲線の曲線となるが、そうならない時、 $\pi^{-1}(x)$ は特異ファイバーであるという。 Σ でファイバーが特異になるもような C の点の全体を表わす。特異ファイバーの分類は、小平 [7] によりなされているが、ここでも特異ファイバーの型を表わす記号は小平によるものを使う。

本稿では楕円曲面の定義に加えて次の二つをいつも仮定することにする。

- $\pi: X \rightarrow C$ は少なくとも一つ特異ファイバーを持つ。
- $\pi: X \rightarrow C$ は相対的に極小である。これは、いずれのファイバーも (-1) -曲線を含まないことと同じである。

楕円曲面 \mathcal{E} の切断とは、射 $\sigma: C \rightarrow X$ で $\pi \circ \sigma = \text{id}_C$ をみたすものをいう。一般には、 \mathcal{E} は少なくとも一つ切断を持つと仮定するのが普通であるが、

ここではそれを仮定しないことにする． \mathcal{E} の切断は，それと X_η との交わりをとることにより， X_η 上の $k(C)$ -有理点と一対一に対応する．もし， \mathcal{E} が切断を持てば，その一つを選び σ_0 とし，それと X_η との交わりを O とすると， (X_η, O) は $k(C)$ 上の楕円曲線となる．これを E と書く． E の有理点の全体 $E(k(C))$ ，あるいは同じことだが， \mathcal{E} の切断の全体は有限生成アーベル群となる (Néron による Mordell-Weil の定理の拡張)．これを \mathcal{E} の Mordell-Weil 群と呼ぶ．さて， $\text{Div}_{\bar{k}}(X)$ で曲面 X 上の (\bar{k} 上定義された) 因子のなす群を表わすことにする．この時， X の Néron-Severi 群が

$$NS(X) = \text{Div}_{\bar{k}}(X)/\text{代数的同値}$$

で定義される．

$\text{Div}_{\bar{k}}(X)$ の二つの因子 D_1, D_2 に対し，交叉数 $D_1 \cdot D_2$ が定義されるが，これは因子を代数的同値類の中で動かしても一定であることがわかり，Néron-Severi 群の元同志に交叉数による積 \cdot が定義される．これにより， $NS(X)/NS(X)_{\text{tors}}$ に双一次形式が定まる．

二つの因子 D_1, D_2 が数値的に同値であるとは，

$$\forall D \in \text{Div}_{\bar{k}}(X) \quad (D_1 - D_2) \cdot D = 0$$

をみたすことをいい，

$$\text{Num}(X) = \text{Div}_{\bar{k}}(X)/\text{数値的同値}$$

と定義する． $\text{Num}(X) = NS(X)/NS(X)_{\text{tors}}$ であることが知られている．明らかに， $\text{Num}(X)$ にも交叉数による積 \cdot が自然に定義される．我々は $(\text{Num}(X), \cdot)$ を Néron-Severi 格子と呼び， S_X と書くことにする．また， S_X の階数を $\rho(X)$ あるいは単に ρ と書き， X の Picard 数と呼ぶ．

以下，この節の終わりまで，楕円曲面 $\mathcal{E} = (X, C, \pi)$ は切断 σ_0 を持つものとする．このとき， $NS(X)$ はねじれ元を持たないことが知られており，したがって $NS(X) = \text{Num}(X)$ である． S_X の自明部分格子 Triv_X を， S_X の部分格子で，特異ファイバーの既約成分と切断 σ_0 とで生成されるものと定義する．このとき， E の $\bar{k}(C)$ -有理点 P に対し，それに対応する \mathcal{E} の切断の定める X の因子を (P) と書くことにすれば，写像

$$\begin{aligned} E(\bar{k}(C)) &\rightarrow NS(X)/\text{Triv} \\ P &\mapsto (P) \bmod \text{Triv} \end{aligned}$$

は同型写像になる．この同型写像を通じて S_X の格子の構造を $E(\bar{k}(C))$ に移すことを考えるのであるが，これは次の補題によって可能になる．

補題 2.2 (塩田 [14]). $E(\bar{k}(C))$ の任意の点 P に対して，次の条件を満たすような $NS(X) \otimes \mathbf{Q}$ の点 $\varphi(P)$ がただ一つ定まる．

- (1) $\varphi(P) \equiv (P) \pmod{\text{Triv} \otimes \mathbf{Q}}$,
- (2) $\varphi(P) \perp \text{Triv}$.

これにより， $E(\bar{k}(C))/E(\bar{k}(C))_{\text{tors}}$ 上に双一次形式が $\langle P, Q \rangle = -(\varphi(P) \cdot \varphi(Q))$ とおくことにより定義される．これは本質的には E 上の Néron-Tate の高さの概念と同じものであり，正定値になることが知られている．このようにして定義された格子 $E(\bar{k}(C))/E(\bar{k}(C))_{\text{tors}}$ を Mordell-Weil 格子と呼び，ここでは $MW_{\bar{k}}(\mathcal{E})$ と書くことにする．また，Mordell-Weil 格子の階数と Picard 数の間には，塩田-Tate の公式と呼ばれる次の関係式が成り立つ．

$$\rho(X) = \text{rank } MW_{\bar{k}}(\mathcal{E}) + 2 + \sum_{P \in C} (m_P - 1).$$

ここで， m_P は P におけるファイバーの既約成分の数である．

3. $K3$ 曲面

滑らかで極小な射影的曲面 X が $K3$ 曲面であるとは，標準因子 K_X が自明であり，不正則数 q が 0 であることである．最初の条件は標準層 $\omega_X = \bigwedge^2 \Omega_X$ が構造層 \mathcal{O}_X と同型であることであり， X 上に至る所 0 でない正則 2-形式が存在することとも同値である．また，すぐにこのような正則 2-形式は存在すれば定数倍を除いて一意に定まることがわかる．これより幾何種数 p_g は

$$p_g = \dim H^0(X, \bigwedge^2 \Omega_X) = 1$$

となる．したがって，Serre の双対定理により $\dim H^2(X, \mathcal{O}_X) = 1$ を得る．そこで，Noether の公式

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{1}{12}(c_1(X)^2 + c_2(X))$$

を用いると

$$1 - q + p_g = \frac{1}{12}((-K_X) \cdot (-K_X) + e(X))$$

が導かれ，位相的 Euler 数 $e(X)$ は 24 であることがわかる．

3.1. 複素 $K3$ 曲面. 我々は定義体 k が複素数体に含まれることを仮定したので, 代数多様体 $X \times_k \mathbf{C}$ を考え, それを複素多様体とみなすことができる. 簡単のために, この複素多様体も同じ記号 X 表わすこととし, \mathcal{O}_X を解析的構造層の意味にも使うことにする. 以下に述べることの詳細については [1] を参照していただきたい.

まず, $b_1(X) = \dim H^1(X, \mathbf{C}) \leq 2 \dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = 2q$ だから, $q = 0$ なら $b_1(X) = 0$ となる. Poincaré の双対定理により $b_3(X) = b_1(X) = 0$ だから, $b_2(X) = 24 - 1 - 0 - 0 = 22$ を得る. そこで, コホモロジー群 $H^2(X, \mathbf{C})$ の Hodge 分解

$$H^2(X, \mathbf{C}) = H^{2,0}(X) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X)$$

を考える. ここで, $H^{p,q}(X)$ は Dolbeault コホモロジー群であり, Dolbeault の同型定理により, $H^{p,q}(X) \simeq H^q(X, \wedge^p \Omega_X)$ であることが知られている. さて, $\dim H^{2,0}(X) = \dim H^{0,2}(X) = p_g = 1$ であるから, $\dim H^{1,1}(X) = b_2(X) - 2 = 20$ となる. 一方, 解析的接続層の完全系列

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbf{Z}}_X \xrightarrow{i} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^\times \longrightarrow 1.$$

より, コホモロジー群の完全系列

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H^1(X, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^\times) \\ \xrightarrow{\delta} H^2(X, \mathbf{Z}) \xrightarrow{i^*} H^2(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X^\times) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

を得る. このとき, X の因子に対し X 上の可逆層が対応すること, さらに可逆層は $H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$ によって分類されることなどを使うと, 先に定義された Néron-Severi 群 $NS(X)$ は, $H^1(X, \mathcal{O}_X^\times) / \ker \delta$ と同型であることがわかる. ここで, j を自然な埋め込み $\underline{\mathbf{Z}}_X \rightarrow \underline{\mathbf{C}}_X$ として, $j^* : H^2(X, \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathbf{C})$ をそれによって引き起こされる準同型とする. このとき, $(1, 1)$ 類に関する Lefschetz の定理から, $NS(X)$ の $j^* \circ \delta$ による像は, $H^{1,1}(X) \cap j^* H^2(X, \mathbf{Z})$ であることがわかる. これより Picard 数 $\rho(X)$ は 20 以下であることがしたがう. また, $H_X := H^2(X, \mathbf{Z})$ にはカップ積によって格子の構造が入るが, これは Poincaré の双対定理によりユニモジュラーである. H_X は $K3$ 格子と呼ばれる格子に同型で, X によらない. 自然な埋め込み $NS(X) \rightarrow H_X$ は格子としての埋め込みになるので, Hodge の指数定理により, $S_X = NS(X)$ は指数 $(1, \rho - 1)$ の格子になることがわかる.

さて, T_X を H_X の中での S_X の直交補空間とし, これを X の超越格子と呼ぶ. すなわち,

$$T_X := S_X^\perp = \{\alpha \in H^2(X, \mathbf{Z}) \mid \forall \beta \in S_X \langle \alpha, \beta \rangle = 0\}.$$

とする. ここで \langle , \rangle はカップ積をあらわす. H_X がユニモジュラーであることから, $H_X = S_X \oplus T_X$ であることが従う. また, T_X は, X 上の 2-サイクルであって, 至る所 0 でない正則 2-形式 ω をそのサイクル上で積分すると 0 になるものの全体と同型になる. さて, ここで我々の構成にとって最も重要な定理を述べる.

定理 3.1 (猪瀬 [6]). X と Y を $K3$ 曲面とし, $f: X \rightarrow Y$ を次数有限な有理写像とする. この時, 自然な準同型 $f^*: T_Y \rightarrow T_X$ と $f_*: T_X \rightarrow T_Y$ で次の性質を満たすものが存在する.

- (1) $\langle f_*(t), f_*(u) \rangle = n \langle t, u \rangle \quad t, u \in T_X,$
- (2) $\langle f^*(t), f^*(u) \rangle = n \langle t, u \rangle \quad t, u \in T_Y,$
- (3) $f^* f_*(t) = nt \quad t \in T_X,$
- (4) $f_* f^*(t) = nt \quad t \in T_Y.$

この定理より $\text{rank } T_X = \text{rank } T_Y$ が得られ, 一方で H_X と H_Y が格子として同型であることから $\text{rank } S_X = \text{rank } S_Y$ を得る. したがって次の系が従う.

系 3.2. X と Y を上の定理と同様とすると, X と Y の Picard 数は同じである.

3.2. $K3$ 楕円曲面. ここでは, $\mathcal{E} = (X, C, \pi)$ が楕円曲面であって X が $K3$ 曲面となるものを考える. このような曲面を $K3$ 楕円曲面とよぶことにする. このとき, \mathcal{E} が相対的に極小であることと, X が極小であることは同値になる. また, 標準層の考察から, X が $K3$ 曲面なら, \mathcal{E} は多重ファイバーを持たないことがわかる. また, \mathcal{E} には少なくとも一つは特異ファイバーがあることがわかり, これより $\pi_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_C$ が得られ, $g(C) = 0$ が導かれる.

いま, \mathcal{E} が切断をもったとすると, 塩田-Tate の公式により, $0 \leq \text{rank } MW_{\bar{k}}(\mathcal{E}) \leq 18$ となる. もし, \mathcal{E} が複素数体上で定義されている場合には, 周期写像の全射性を使うことによって次が示される.

定理 3.3 (Cox [4]). 0 から 18 までの任意の整数 r に対して, $K3$ 楕円曲面 $\mathcal{E} = (X, C, \pi)$ で, $\text{rank } MW_{\bar{k}}(\mathcal{E})$ がちょうど r となるものが存在する.

以下の目的は、このような楕円曲面を構成し、可能ならば、その定義方程式を具体的に書き表わすことである。

3.3. Kummer 曲面. A をアーベル曲面とし、 ι で (-1) -倍写像を表わす。このとき商空間 $A/\langle \iota \rangle$ は A の二等分点に対応する 16 個の二重点を持つ。これらの二重点をブローアップによって解消したものは $K3$ 曲面になり、これを A に対応する Kummer 曲面と呼び、 $Km(A)$ であらわす。これらの 16 の例外曲線により、Kummer 曲面の Picard 数は 16 以上になる。さらに詳しくは、

$$\rho(Km(A)) = 16 + \rho(A)$$

が成り立つ。次節では A が二つの楕円曲線となる特別な場合を考える。すなわち、 E_1, E_2 を

$$E_1 : y^2 = x^3 + ax + b,$$

$$E_2 : y^2 = x^3 + cx + d.$$

として定義される楕円曲線とし、 $A = E_1 \times E_2$ とする。このとき、

$$\rho(Km(A)) = 16 + \text{rank Hom}_{\bar{k}}(E_1, E_2)$$

となることが知られている。そこで、 $\text{rank Hom}_{\bar{k}}(E_1, E_2)$ を $h(E_1, E_2)$ 、あるいは単に h と略記することにとすると、 $h(E_1, E_2)$ について次の補題が知られている。

補題 3.4. (1) E_1 と E_2 が \bar{k} 上同種でなければ、 $h(E_1, E_2) = 2$ 、

(2) E_1 と E_2 が \bar{k} 上同種であるが、どちらも虚数乘法を持たない時は、 $h(E_1, E_2) = 3$ 、

(3) E_1 と E_2 が \bar{k} 上同種であって、どちらも虚数乘法を持つ時は、 $h(E_1, E_2) = 4$ である。

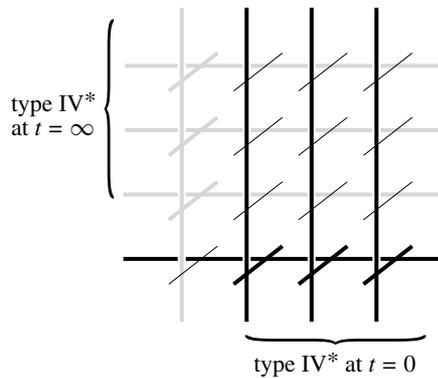
4. 基底変換による $K3$ 楕円曲面の構成

この節では、直積型のアーベル多様体 $E_1 \times E_2$ から得られる Kummer 曲面 から出発して、Picard 数は同じだが Mordell-Weil 格子の階数が様々に違った $K3$ 楕円曲面を構成する。

まず、 $Km(E_1 \times E_2)$ の特異アフィンモデルとして

$$(1) \quad (y^3 + cy + d)t^2 = x^3 + ax + b$$

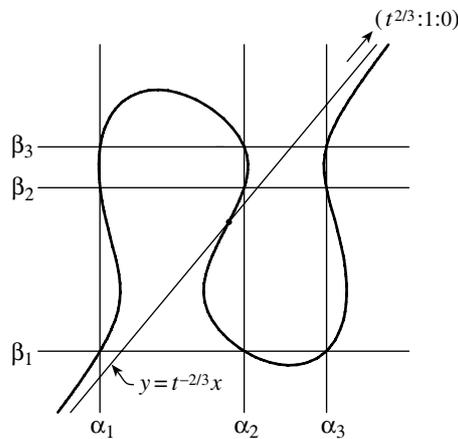
がとれることが容易にわかる． $Km(E_1 \times E_2)$ には複数の楕円曲面の構造が入ることが知られており，そのうち切断を持つものについては小木曾 [12] によりすべて分類されている．その中で，上の式の記号で $\pi : (x, y, t) \mapsto t$ によって定義される楕円曲面の構造を考える．(図 1 参照.)



$Km(E_1 \times E_2)$ の中には図のような配置をした 24 の有理曲線が含まれる．(猪瀬 [6] , 小木曾 [12] 参照.) この中に二つの互いに交わらない IV* 型の因子があることが見れる．これが上の楕円曲面の $t = 0, \infty$ における特異ファイバーである．このほかのファイバーは一般には既約であるが， E_1 と E_2 同種なら可約になることもある．

図 1.

こうして得られる楕円曲面は，先の式 (1) を t をパラメーターとする xy -平面の三次式の族と解釈したものとみなすことができる．(図 2 参照.)



$(y - \beta_1)(y - \beta_2)(y - \beta_3)t^2 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)$ の $t = \text{一定}$ による断面図．もし t が三乗数なら無限遠に有理点が現われる．無限遠点における接線はもう一度三次曲線と交わるので，自明でない有理点が得られることが見られる．

図 2.

この楕円曲面には \bar{k} 上で定義された切断は存在するが，一般には k 上で定義された切断は存在しない．ところが， $t = u^3$ とおくと，斉次座標で表わすと $(x : y : z) = (u^2 : 1 : 0)$ と書ける切断がすぐ見つかる．この切断を原点に

選ぶことによって, (1) に $t = u^3$ を代入した式を Weierstrass の標準形に書き直すと,

$$Y^2 Z = X^3 - 48ac u^4 X Z^2 - 16((4c^3 + 27d^2) u^{12} - 54bd u^6 + (4a^3 + 27b^2)) Z^3,$$

となる. この式で定義される $k(\mathbf{P}^1)$ 上の楕円曲線を $F^{(6)}(E_1, E_2)$ あるいは単に $F^{(6)}$ で表わし, その極小な Kodaira-Néron モデルを $X^{(6)}(E_1, E_2)$ あるいは $X^{(6)}$ と表わすことにする. そしてこれに対応する楕円曲面を $\mathcal{F}^{(6)}(E_1, E_2)$ あるいは $\mathcal{F}^{(6)}$ と書く. さらに, 一般に

$$A = -48ac, \\ B(t) = -16((4c^3 + 27d^2)t^2 - 54bd t + (4a^3 + 27b^2))$$

と置いて, 自然数 n に対して $F^{(n)}(E_1, E_2)$ を,

$$F^{(1)}(E_1, E_2) : Y^2 = X^3 + A t^{4n} X + t^{5n} B(t^n)$$

で定義される $k(\mathbf{P}^1)$ 上の楕円曲線とし, その極小な Kodaira-Néron モデルを $X^{(n)}(E_1, E_2)$ とする. そしてこれに対応する楕円曲面を $\mathcal{F}^{(n)}(E_1, E_2)$ で表わす. このとき, $m_n : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ を $t \mapsto t^n$ で定義される写像とすると, X_n は, 図式

$$\begin{array}{ccc} X^{(1)} \times_{\mathbf{P}^1} \mathbf{P}^1 & \longrightarrow & X^{(1)} \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbf{P}^1 & \xrightarrow{m_n} & \mathbf{P}^1 \end{array}$$

で得られるファイバー積 $X^{(1)} \times_{\mathbf{P}^1} \mathbf{P}^1$ の極小モデルと見なせる. 同じことであるが, $X^{(n)}$ は $X^{(1)}$ より基底変換 $m_n : t \mapsto t^n$ によって得られといってもよい. これよりとくに, $X^{(n)}$ から $X^{(1)}$ への次数 n の有理写像があることがわかる. また, m_n は $t = 0, \infty$ で分岐しているので, もともとの $\mathcal{F}^{(2)}$ にあった二つの IV*型のファイバーは $\mathcal{F}^{(n)}$ の中では, n に応じて違った型になる. 注意 4.1. (1) $X^{(2)}$ は \bar{k} 上 $Km(E_1, E_2)$ と同型であるが, 一般には k 上では同型にはならない. しかし, 例えば E_1, E_2 が同時に k 上定義された二等分点を持つとすると, $X^{(2)}$ と $Km(E_1, E_2)$ は k 上同型である.

(2) $F^{(1)}$ の代わりに $E^{(1)}$ を

$$E^{(1)} : Y^2 = X^3 + A t^2 X + t^2 B(t)$$

で定義すると、これからも基底変換によって $\mathcal{F}^{(n)}$ が得られる。この場合、 $E^{(1)}$ の Kodaira-Néron モデルは有理曲面になるので、その Mordell-Weil 格子の構造はすぐにわかる(小木曾-塩田 [13] 参照)。これにより、 $\mathcal{F}^{(n)}$ の Mordell-Weil 格子は $\mathcal{E}^{(1)}$ の Mordell-Weil 格子と同型な格子を部分格子として持つことがわかる。また、 $F^{(1)}$ は $E^{(1)}$ の t による二次ひねり(quadratic twist)として得られることもわかる。

ここで本稿の主定理を述べる。

定理 4.2. $X^{(n)}(E_1, E_2)$ を上のように定義された曲面とすると、 $X^{(n)}(E_1, E_2)$ は $1 \leq n \leq 6$ のとき、またそのときに限り $K3$ 曲面となる。また、 $1 \leq n \leq 6$ のとき、楕円曲面 $\mathcal{F}^{(n)}(E_1, E_2)$ の Mordell-Weil 格子の階数を $r^{(n)}$ とおくと、 $r^{(n)}$ は次の式で与えられる。

$$r^{(n)} = \min(4(n-1), 16) + h - \nu(n).$$

ただし、 $h = \text{rank Hom}_{\bar{k}}(E_1, E_2)$ であり、 $\nu(n)$ は、 $j(E)$ で楕円曲線 E の j -不変量を表わしたとき、

$$\nu(n) = \begin{cases} 0 & j(E_1) \neq j(E_2), \\ n & j(E_1) = j(E_2) \neq 0, 1728, \\ 2n & j(E_1) = j(E_2) = 0, 1728, \end{cases}$$

として定義される。

$r^{(n)}$ の上のような表わし方は、塩田氏の談話会講演から採らせていただいた。

上の定理の証明のあらすじは次の通りである。まず、 $\mathcal{F}^{(n)}$ の特異ファイバーを Tate のアルゴリズムによって決めることにより、 $X^{(n)}$ の位相的 Euler 数が計算できる。これにより、 $X^{(n)}$ が $K3$ 曲面になるのは $1 \leq n \leq 6$ のときに限ることがわかる。このとき、猪瀬の定理により、 $\rho(X^{(n)}) = \rho(Km(A)) = 16 + h$ であることがわかる。 $r^{(n)}$ は、特異ファイバーの決定と塩田-Tate の公式による。詳しくは [8] 参照。

さて、上のように計算された $r^{(n)}$ が、 n, E_1, E_2 をいろいろ変えたとき、0 から 18 までの整数をいろいろ動き、15 以外のすべての整数があらわれる。一つだけ抜けている 15 の場合は別に扱わなければならないが、それは第 6 節で述べる。

5. 例

この節では，Mordell-Weil格子の階数が上限である 18 になる例を二つあげる．

例 5.1. E_1, E_2 として

$$E_1 : y^2 = x^3 - x,$$

$$E_2 : y^2 = x^3 - 11x - 14,$$

とおくと，これらは同種であるが，同型ではない．また，これらはどちらも $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ による虚数乘法を持つ．これらは，アントワープの表 [2] でそれぞれ 32A, 32C と呼ばれているものである．すると，次の Weierstrass 方程式で定義される楕円曲面の Mordell-Weil 格子の階数はいずれも 18 である．

$$Y^2 = X^3 - 33t^4X + t(8t^{10} + 1),$$

$$Y^2 = X^3 - 33t^4X + (8t^{12} + 1)$$

例 5.2. E_1, E_2 として

$$E_1 : y^2 = x^3 + 1,$$

$$E_2 : y^2 = x^3 - 15x + 22,$$

とおくと，これらは同種であるが，同型ではない．また，これらはどちらも $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ による虚数乘法を持つ．これらは，アントワープの表 [2] でそれぞれ 36A, 36B と呼ばれているものである．すると，次の Weierstrass 方程式で定義される楕円曲面の Mordell-Weil 格子の階数はいずれも 18 である．

$$Y^2 = X^3 + 432t(16t^{10} + 44t^5 - 1),$$

$$Y^2 = X^3 + 432(16t^{12} + 44t^6 - 1)$$

上の例のうち最後のものについては，具体的に切断を求める方法が Chahal-Meijer-Top [3] によって与えられている．これは，生成点におけるファイバーが虚数乘法を持つ $k(t)$ 上の楕円曲線であることに基づく．その他のものについては，すべての切断を見つけるのとても困難な問題のように思われる．

6. 階数 15 の場合

アーベル曲面全体の中では，直積型のアーベル曲面は非常に特別なものであるので，第 4 節のような構成法が一般のアーベル曲面にも使えれば，それによ

り得られる Mordell-Weil 格子の種類が増すのではないかというのは自然な発想である．ここでは，もとのアーベル曲面として，種数 2 の曲線のヤコビ多様体を用い，それから $K3$ 楕円曲面を構成する方法を考える．

A を種数 2 の曲線のヤコビ多様体とすると， Θ 因子を利用して $Km(A)$ を P^3 にはめ込むことができる．そのはめ込まれた曲面に 16 個ある特異点を解消したものが P^5 中の $(2, 2, 2)$ -型の完全交叉として得られる．この曲面には 32 本の直線が含まれており，図 3 のように交叉している ([5] 参照) ．

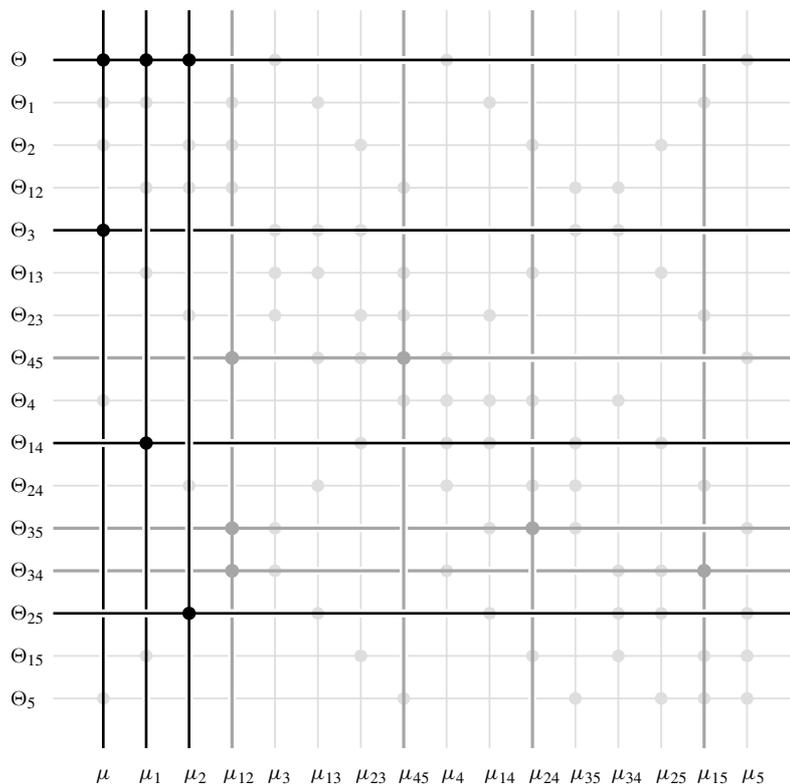


図 3.

さらに，図 3 中に見られるように，

$$D_1 = 3\Theta + 2\mu + 2\mu_1 + 2\mu_2 + \Theta_3 + \Theta_{14} + \Theta_{25},$$

$$D_2 = 3\mu_{12} + 2\Theta_{34} + 2\Theta_{35} + 2\Theta_{45} + \mu_{15} + \mu_{24} + \mu_{45}$$

なる，互いに交叉しない二つの IV^* 型の因子が見つかる．これらの因子を含む線形系を考えることにより， $Km(A)$ に楕円曲面の構造が入る．しかしなが

ら，一般にはこれには切断がないので，その生成点におけるファイバーのヤコビ多様体に対応した楕円曲面 $\mathcal{G}^{(2)}$ を考える．このとき， $K3$ 楕円曲面は多重ファイバーを持ち得ないことから $\mathcal{G}^{(2)}$ ともとの楕円曲面の特異ファイバーの型は同じであり，またそれらの Picard 数も同じになることがわかる．

$\mathcal{G}^{(2)}$ には上の二つの因子に対応する二つの IV^* 型の特異ファイバーがあるので，底空間である \mathbb{P}^1 の座標を適当に選ぶと，生成点でのファイバーは次のような形の Weierstrass 方程式で書けているはずである．

$$(2) \quad G^{(2)} : y^2 = x^3 + at^4x + t^4b(t),$$

ただし $a \in k$, $b(t) \in k[t]$, $\deg b(t) = 4$.

ここで注意しなければならないのは， $b(t)$ は第 4 節の $B(t)$ と違い t^2 の多項式にはなっていないので，第 4 節とは違って $G^{(1)}$ と呼べるものは一般には存在しない．

さて，ここで $Km(A)$ の \bar{k} 上の自己準同型のなす群が \mathbb{Z} と同型であるとする．すると， $\rho(A) = 1$ であり， $\rho(Km(A)) = 17$ を得る．このとき， $NS(Km(A))$ は図 3 にでてくる因子で生成されることが知られている．すると，これより $\mathcal{G}^{(2)}$ の特異ファイバーは二つの IV^* 型を除いてすべて既約であることがわかる．そこで，先の節と同じように $t \mapsto t^3$ による基底変換によって $\mathcal{G}^{(6)}$ を構成すると，これは既約ファイバーのみを持つ．そこで猪瀬の定理と塩田-Tate の公式を使えば

$$\text{rank } MW_{\bar{k}}(\mathcal{G}^{(6)}) = 17 - 2 - 0 = 15$$

を得る．

ここで課題として残るのは，種数 2 の曲線を具体的に式で書いたとき，(2) 中の $a, b(t)$ が具体的に求められるかということであるが，これはあまり容易ではないように思われる．

参考文献

1. W. Barth, C. Peters, and A. van de Ven, *Compact complex surfaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
2. B. J. Birch and W. Kuyk (eds.), *Modular functions of one variable. IV*, Springer-Verlag, Berlin, 1975, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 476.
3. J. Chahal, M. Meijer, and J. Top, *Sections on certain $j = 0$ elliptic surfaces*, Comment. Math. Univ. St. Paul. **49** (2000).

4. David A. Cox, *Mordell-Weil groups of elliptic curves over $\mathbf{C}(t)$ with $p_g = 0$ or 1*, Duke Math. J. **49** (1982), no. 3, 677–689.
5. Phillip Griffiths and Joseph Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978, Pure and Applied Mathematics.
6. H. Inose, *On certain Kummer surfaces which can be realized as non-singular quartic surfaces in \mathbf{P}^3* , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **23** (1976), 545–560.
7. K. Kodaira, *On compact analytic surfaces. II, III*, Ann. of Math. (2) **77** (1963), 563–626; *ibid.* **78** (1963), 1–40.
8. M. Kuwata, *Elliptic K3 surfaces with given mordell-weil rank*, Comment. Math. Univ. St. Pauli **49** (2000), 91–100.
9. J.-F. Mestre, *Courbes elliptiques de rang ≥ 11 sur $\mathbf{Q}(t)$* , C. R. Acad. Sci. Paris **313**, Série I (1991), 139–142.
10. ———, *Courbes elliptiques de rang ≥ 12 sur $\mathbf{Q}(t)$* , C. R. Acad. Sci. Paris **313**, Série I (1991), 171–174.
11. K. Nagao, *An example of elliptic curve over $\mathbf{Q}(T)$ with rank ≥ 13* , Proc. Japan Acad. **70**, Ser. A (1994), 152–153.
12. K. Oguiso, *On Jacobian fibration on the Kummer surfaces of the product of non-isogenous elliptic curves*, J. Math. Soc. Japan **41** (1989), 651–680.
13. K. Oguiso and T. Shioda, *The Mordell-Weil lattice of a rational elliptic surface*, Comment. Math. Univ. Sancti Pauli **40** (1991), 83–99.
14. T. Shioda, *On the Mordell-Weil lattices*, Comment. Math. Univ. Sancti Pauli **39** (1990), 211–240.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE CAEN, B.P.5186, F-14032 CAEN CEDEX, FRANCE

E-mail address: `kuwata@math.unicaen.fr`