

線形代数 I・数学 II — 期末試験

2007 年 7 月 19 日

時間 60 分

- 筆記用具以外の持ち込みは不可.
- 最後の結果だけを書くのではなく、途中の計算や説明も書くこと.

1 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ で表される座標平面上の点の移動を f とする.

- a) A は原点のまわりの回転移動を表す行列であるが、その回転角度は何度であるか.
 b) f によって、点 $(\sqrt{3}, 1)$ はどんな点に移るか.
 c) A^2 を求めよ.
 d) 合成移動 $f \circ f$ によって点 $(1, -\sqrt{3})$ はどんな点に移るか.

2 次の各々の連立 1 次方程式を掃き出し法を用いて解け.

$$\text{a) } \begin{cases} x - y + z + 2w = 1 \\ 3x - 5y - 3z + 4w = -3 \\ 2x - 2y + 5z + 1w = 5 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - 3y + z - 2w = 1 \\ -2x + 7y + 8w = -2 \\ -2y - 3z - 6w = 1 \\ -3y - 4z - 9w = -1 \end{cases}$$

3 a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列をもとめよ.

b) 次の連立一次方程式の解を a) の結果を用いて求めよ.

$$\begin{cases} x + y - 3z = 3 \\ x - 3y + z = -4 \\ -3x + y + z = 1 \end{cases}$$

4 次の各々の行列式をもとめよ.

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

5 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 3 & 5 \\ 2 & 9 & 5 & 8 \\ 1 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}$ とする. このとき次の問いに答えよ.

[この順番に解答していくのが一番効率的とは限らない.]

- a) 行列 A の階数を求めよ.
- b) 方程式 $A\vec{v} = \vec{0}$ の解をすべて求めよ.
- c) 方程式 $A\vec{v} = \vec{b}$ が解を持つように定数 a を決め, そのときの解をすべて求めよ.

6 a を定数としたとき, 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & a & -1 \\ a & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

の行列式 $\det A$ を求め, A が逆行列を持たないような a を決定せよ. さらに, そのような a の値のそれぞれについて A の階数を求めよ.